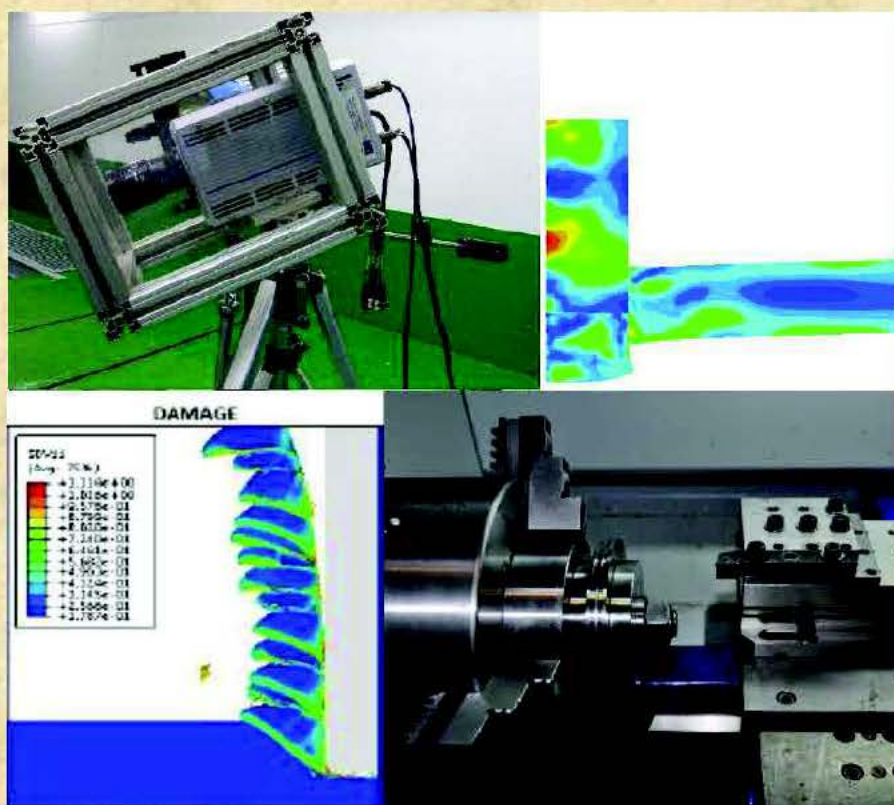




Universidad  
Carlos III de Madrid  
[www.uc3m.es](http://www.uc3m.es)

## TESIS DOCTORAL

# Formulación de un Algoritmo Eficiente de Integración de un Modelo de Daño Isótropo y Validación en Condiciones Dinámicas



**Autor:**

**Javier Marino Romero**

**Directora:**

**Dra. María Henar Miguélez Garrido**

**Departamento de Ingeniería Mecánica**

**Leganés, Enero de 2016**

## TESIS DOCTORAL

# Formulación de un Algoritmo Eficiente de Integración de un Modelo de Daño Isótropo y Validación en Condiciones Dinámicas

Autor:

Javier Marino Romero

Directora:

Dr. María Henar Miguélez Garrido

Departamento de Ingeniería Mecánica

Leganés, Enero de 2016

# TESIS DOCTORAL

## Formulación de un Algoritmo Eficiente de Integración de un Modelo de Daño Isótropo y Validación en Condiciones Dinámicas

Autor: Javier Marino Romero

Directora: Dr. María Henar Miguélez Garrido

Firma del Tribunal Calificador

Firma

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés a      de      de

## Resumen

En esta Tesis Doctoral se ha formulado un nuevo algoritmo de integración eficiente para el modelo constitutivo termoviscoplastico completamente acoplado con daño isótropo desarrollado inicialmente por J. Lemaitre y R. Desmorat (32). El modelo constitutivo y el algoritmo de integración tienen en cuenta tanto el endurecimiento isótropo como el cinemático siendo aplicable a condiciones de carga generales (condiciones de carga tridimensionales). Además el modelo constitutivo desarrollado en esta Tesis Doctoral amplía el modelo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) para incluir condiciones no isothermas aplicadas a las ecuaciones constitutivas de modelos termoviscoplasticos de tipo  $J_2$  siguiendo la aproximación establecida por la condición de consistencia para modelos de plasticidad dependientes de la velocidad de deformación.

El nuevo procedimiento de integración numérico propuesto conduce a resolver un sistema de sólo tres ecuaciones escalares con tres incógnitas, si se supone un problema adiabático, o un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el caso en el que el flujo de calor sea relevante y el campo de temperaturas deba ser calculado mediante el código de elementos finitos utilizado. El algoritmo propuesto requiere la construcción de una matriz Jacobiana de orden 3x3 (o 2x2 dependiendo de la validez de la suposición de problema adiabático), en lugar de la matriz Jacobiana de orden 28x28 propuesta por J. Lemaitre y R. Desmorat (32).

El algoritmo desarrollado puede ser directamente aplicable a modelos que consideran simultáneamente el endurecimiento isótropo y el cinemático sin necesidad de incluir el daño. En estos casos el coste computacional del algoritmo propuesto es similar al de aquellos algoritmos basados en el retorno radial que sólo consideran el endurecimiento isótropo. Adicionalmente se formula la expresión del operador tangente consistente con el algoritmo numérico propuesto. Este esquema de integración eficiente se ha implementado en un código comercial de elementos finitos y su validez

se ha demostrado con la simulación numérica de ensayos de impacto y al mecanizado a alta velocidad de corte.

Dado que el algoritmo propuesto es también válido para modelos constitutivos del material que no incluyan el daño pero si los efectos del endurecimiento isótropo y cinemático, se ha realizado una comparación de los resultados obtenidos aplicando distintos modelos de fallo como son fallo por deformación plástica equivalente constante, fallo por máxima tensión de cortadura, modelo de fallo de Wilkins, modelo de fallo de Johnson - Cook, modelo de fallo de Cockcroft - Latham, modelo de fallo de Xue - Wierzbicki y modelo de fallo por Daño propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32).

## Abstract

In this Doctoral Thesis has been formulated a new and efficient integration algorithm for the thermoviscoplastic constitutive model fully coupled with isotropic damage developed by J. Lemaitre and R. Desmorat (32). The constitutive model and the integration algorithm takes into account both isotropic and kinematic hardening and it is applicable to general load conditions (three dimensional loading states). Besides the constitutive model developed in this thesis extends the model proposed by J. Lemaitre y R. Desmorat (32) to include non-isothermal conditions applied to  $J_2$  type thermoviscoplastic constitutive equations following the consistency condition approach for strain rate dependent plasticity model.

The proposed numerical integration procedure leads to solve a system of only three coupled scalar equations with three scalar unknowns, assuming an adiabatic behaviour, or a system of two coupled equations with two scalar unknowns when the heat flux is relevant and the temperature field should be computed by a finite element code. The proposed algorithm requires building a Jacobian matrix of order 3x3 (or 2x2 depending on the validity of adiabatic assumption), instead of the Jacobian matrix of order 28x28 proposed by J. Lemaitre and R. Desmorat (32).

The developed algorithm can be directly applicable to constitutive models considering simultaneously isotropic and kinematic hardening without having to include damage. In these cases the computational cost of the proposed algorithm is similar to those algorithms based on the classical return mapping algorithm accounting for isotropic hardening exclusively. Additionally the expression for the tangent consistent operator according to the numerical algorithm proposed is formulated. This efficient numerical integration schema has been implemented in a commercial finite element code and its validity has been demonstrated with numerical simulation of impact tests and high speed machining.

Since the proposed algorithm also applies to constitutive models that does not include the damage but the effects of isotropic and kinematic hardening, has been carried out a comparison of the results obtained by applying different models of failure as are failure by constant equivalent plastic strain, maximum shear stress failure, Wilkins failure model, Johnson - Cook failure model, Cockcroft - Latham failure model, Xue - Wierzbicki failure model and damage failure model.

## Dedicado

Esta tesis está dedicada a mis padres Eloy y Carmen que siempre me impulsaron y apoyaron a seguir avanzando y en especial a mi madre cuyo cariño y recuerdo me ha dado fuerzas y motivación para completar este trabajo.

También quiero dedicar este trabajo a Henar y a mis hijos Henar, Carmen, Pilar y Javier a los que no he podido dedicar más tiempo para poder finalizar esta tesis doctoral.



## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Profesora Dña. Henar Miguélez Garrido la ayuda, dedicación y confianza que me ha prestado en todo momento, las cuales han sido fundamentales para la realización de esta tesis.

También quiero mostrar mi gratitud al Profesor D. José Fernández Sáez por la orientación facilitada, por sus ánimos para seguir adelante y por ofrecerme su ayuda siempre que la he necesitado.

A los Profesores D. José Díaz Álvarez y D. José Antonio Loya Lorenzo por su colaboración en la realización de los trabajos experimentales.

Al Departamento De Ingeniería Mecánica y al Departamento De Mecánica De Medios Continuos Y Teoría De Estructuras por poner a mi disposición su personal de laboratorio, sus instalaciones y medios.

A los muchos y muy buenos profesores que he tenido a lo largo de mi vida académica y sin los cuales no hubiese podido abordar un trabajo como el realizado, en especial al Profesor D. Javier Jiménez Sendín.

Por último pero no menos importante quiero dar las gracias a mi familia y en especial a mis hijos cuya “confianza” me ha impulsado a finalizar antes de lo que ellos esperaban esta Tesis Doctoral.

A todos ellos muchas gracias por su apoyo, cariño y confianza.

# Índice

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	XVII
Nomenclatura	XIX
<b>1. Introducción y Objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Aportaciones originales de la Tesis . . . . .	5
1.4. Contenido de la Tesis . . . . .	6
<b>2. Antecedentes</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Endurecimiento isótropo y cinemático . . . . .	10
2.2.1. Viscoplasticidad . . . . .	11
2.3. Deterioro del material. . . . .	13
2.4. Criterios de Fallo . . . . .	16
2.4.1. Fallo macroscópico . . . . .	16
2.4.2. Criterios de Fallo y Plastificación y su relación con el endurecimiento cinemático . . . . .	19
2.4.3. Criterio I: Deformación plástica equivalente constante . . . . .	20
2.4.4. Criterio II: Máxima tensión de cortadura . . . . .	21
2.4.5. Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh . . . . .	23
2.4.6. Criterio IV: Modelo de fallo de Wilkins . . . . .	25
2.4.7. Criterio V: Modelo de fallo de Johnson - Cook . . . . .	26
2.4.8. Criterio VI: Modelo de fallo de Xue - Wierzbicki . . . . .	27
2.4.9. Criterio VII: Modelo de fallo por Daño . . . . .	29
2.4.9.1. Tensión Efectiva . . . . .	30

## ÍNDICE

---

2.4.9.2. Evolución del Daño Anisótropo . . . . .	32
2.4.9.3. Evolución del Daño Isótropo . . . . .	33
<b>3. Modelo Constitutivo</b>	<b>35</b>
3.1. Función de plastificación J2 . . . . .	35
3.2. Endurecimiento isótropo y cinemático . . . . .	37
3.3. Viscoplasticidad . . . . .	39
3.4. Ecuaciones Constitutivas . . . . .	40
3.4.1. Procesos reversibles. Ecuaciones termoelásticas . . . . .	41
3.4.2. Procesos irreversibles. Marco termodinámico . . . . .	43
3.4.2.1. Hipótesis de normalidad . . . . .	44
3.4.2.2. Ecuaciones de la función de plastificación . . . . .	45
3.4.2.2.1. Ecuación de Johnson Cook . . . . .	47
3.4.2.3. Potencial de Endurecimiento Cinemático . . . . .	48
3.4.2.4. Potencial de Disipación asociado al Daño . . . . .	49
3.4.3. Ecuaciones de Evolución de las Variables de Estado . . . . .	49
3.4.3.1. Endurecimiento Isótropo y Deformación Plástica . . . . .	50
3.4.3.2. Ecuaciones del Endurecimiento Cinemático . . . . .	51
3.4.3.3. Ecuaciones de Daño . . . . .	52
3.4.4. Disipación de Energía . . . . .	52
<b>4. Resolución Numérica</b>	<b>55</b>
4.1. Introducción . . . . .	55
4.2. Principio de Objetividad . . . . .	57
4.2.1. Gradiente de deformación y velocidades de deformación . . . . .	58
4.2.2. Derivada Objetiva . . . . .	59
4.3. Recopilación de Ecuaciones . . . . .	63
4.4. Algoritmo de Resolución . . . . .	65
4.5. Particularización para el modelo de Johnson-Cook . . . . .	72
4.5.1. Operador Tangente Consistente . . . . .	73
4.6. Adimensionalización de las Ecuaciones . . . . .	77
4.7. Procedimiento de Resolución . . . . .	78

<b>5. Ensayos de impacto sobre Ti 6Al-4V</b>	<b>81</b>
5.1. El Titanio y sus aleaciones . . . . .	81
5.1.1. Propiedades físicas y mecánicas del Ti 6Al-4V . . . . .	84
5.2. Ensayos de Impacto . . . . .	86
<b>6. Calibración y Validación</b>	<b>91</b>
6.1. Simulación de problemas de impacto con elementos finitos . . . . .	94
6.2. Validez de la Hipótesis Adiabática . . . . .	95
6.3. Cálculo de la velocidad residual . . . . .	96
6.4. Criterio I: Deformación plástica equivalente constante . . . . .	99
6.5. Criterio II: Máxima tensión de cortadura . . . . .	106
6.6. Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh . . . . .	112
6.7. Criterio IV: Modelo de fallo de Wilkins . . . . .	117
6.8. Criterio V: Modelo de fallo de Johnson - Cook . . . . .	123
6.9. Criterio VI: Modelo de fallo de Xue - Wierzbicki . . . . .	131
6.10. Criterio VII: Modelo de fallo por Daño . . . . .	139
6.11. Resumen y Comparación de Modelos . . . . .	148
<b>7. Aplicación al Corte Ortogonal</b>	<b>155</b>
7.1. Mecanizado y Corte de Aleaciones Metálicas . . . . .	155
7.1.1. Formación de Viruta . . . . .	157
7.1.2. Tipos de Viruta . . . . .	164
7.1.2.1. Viruta Segmentada . . . . .	166
7.1.3. Mecanizado de las aleaciones de titanio . . . . .	168
7.2. Ensayos De Corte Ortogonal . . . . .	169
7.2.1. Dispositivo de ensayos . . . . .	169
7.2.2. Fuerzas de corte . . . . .	170
7.2.3. Morfología de viruta . . . . .	173
7.3. Modelo Numérico . . . . .	175
7.3.1. Resultados numéricos . . . . .	177
7.4. Conclusiones . . . . .	183
<b>8. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>185</b>
8.1. Conclusiones . . . . .	185
8.2. Trabajos Futuros . . . . .	188
<b>Bibliografía</b>	<b>189</b>

## ÍNDICE

---

<b>A. Operadores Tensoriales</b>	<b>193</b>
A.1. Productos tensoriales . . . . .	193
A.2. Definiciones de tensores . . . . .	194
<b>B. Variables Intermedias</b>	<b>199</b>
B.0.1. Derivadas parciales respecto a $\Delta p$ , $D$ , $\Delta T$ y la variable $B$ . . . . .	200
B.0.2. Derivadas parciales respecto a $\Delta \bar{\epsilon}$ . . . . .	201
<b>C. Matriz Jacobiana</b>	<b>203</b>
<b>D. Detalle de la deducción de expresiones</b>	<b>205</b>
<b>E. Superficie de Plastificación tipo <math>J_2</math></b>	<b>215</b>

# Índice de figuras

2.1. Superficie de fallo definida por el Criterio de Máxima Tensión de Cortadura y evolución de la superficie de plastificación debida al endurecimiento isótropo según el criterio de plastificación de tipo $J_2$ representado en el espacio de las tensiones principales de $\sigma$ - $\sigma_b$ . . . . .	22
2.2. Ensayo de tracción hasta rotura en un test uniaxial . . . . .	29
3.1. Descomposición clásica de la deformación en parte elástica y plástica . . . . .	36
3.2. Evolución de la superficie de plastificación según el criterio de von Mises al experimentar el material un endurecimiento isótropo en condiciones de tensión plana en un test uniaxial . . . . .	37
3.3. Evolución de la superficie de plastificación según el criterio de von Mises al experimentar el material un endurecimiento cinemático en condiciones de tensión plana en un test uniaxial . . . . .	38
3.4. Evolución de la superficie de plastificación según el criterio de von Mises al experimentar el material endurecimientos isótropo y cinemático en condiciones de tensión plana en un test uniaxial . . . . .	39
3.5. Comportamiento viscoplástico de un material junto con un endurecimientos isótropo y cinemático en condiciones de tensión plana en un test uniaxial . . . . .	40
5.1. Diagramas de fase de las aleaciones de titanio . . . . .	82
5.2. Equipo utilizado en los ensayos de impacto a alta velocidad . . . . .	87
5.4. Gráfica de velocidad residual frente a velocidad de impacto obtenidos experimentalmente. Las placas ensayadas son de 3 mm de espesor y un tamaño 110x110 mm <sup>2</sup> y se sometieron a impactos con un cilindro de acero templado de 5,5 mm de diámetro, con una longitud de 7,9 mm siendo su masa de 1,47 g . . . . .	89
5.3. Secuencia de imágenes obtenidas para un ensayo de impacto a 365 $\frac{m}{s}$ . . . . .	90

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

6.1. Malla empleada en la simulación numérica del impacto perpendicular de un proyectil de cabeza plana sobre una placa empotrada en sus extremos. La malla de la placa está compuesta por 5275 elementos . . . . .	95
6.2. Evolución del campo de velocidades en el proyectil y la placa . . . . .	98
6.3. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función de la deformación plástica equivalente acumulada a rotura ( $p_{eq}$ ) . . .	100
6.4. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función de la deformación plástica equivalente a rotura ( $\epsilon_f$ ) . . . . .	101
6.5. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para la variante basada en la deformación plástica equivalente acumulada correspondiente a un valor de $p_f = 5.37$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (27 % error) y 317 (19 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,1 %. . . . .	102
6.6. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para la variante basada en la deformación plástica equivalente correspondiente a un valor de $\epsilon_f = 4.55$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (24 % error) y 317 (17 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5 %. . . . .	102
6.7. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada y para un valor de $p_f = 5.37$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa. . .	103
6.8. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada y para un valor de $p_f = 5.37$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	104
6.9. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada y para un valor de $p_f = 5.37$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	105

6.10. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función de la máxima tensión de cortadura a rotura( $\tau_{max}$ ) . . . . .	107
6.11. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo basado en la máxima tensión de cortadura correspondiente a un valor de $\tau_{max} = 740$ MPa. Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (26,8 % error) y 317 (18,4 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,15 %. . . . .	108
6.12. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo basado en la máxima tensión de cortadura y para un valor de $\tau_{max} = 740$ MPa. . . . .	109
6.13. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo basado en la máxima tensión de cortadura y para un valor de $\tau_{max} = 740$ MPa. En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	110
6.14. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo basado en la máxima tensión de cortadura y para un valor de $\tau_{max} = 740$ MPa. En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	111
6.15. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $D_{Oh}$ . . . . .	112
6.16. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh correspondiente a un valor de $D_{Oh} = 7$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (24,3 % error) y 317 (14,4 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,2 % . . . . .	113
6.17. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh y para un valor de $D_{Oh} = 7$ . . . . .	114



## ÍNDICE DE FIGURAS

---

6.18. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh y para un valor de $D_{Oh} = 7$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	115
6.19. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente al modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh y para un valor de $D_{Oh} = 7$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	116
6.20. Evolución del astillamiento predicho por el modelo de fallo de wilkins para valores bajos del parámetro $\sigma_{WK}$ . Los parámetros de esta simulación corresponden a $\sigma_{WK} = 1500$ MPa, $a_{WK} = 2$ , $b_{WK} = 2$ y $D_c = 35$ . . . . .	117
6.21. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $D_c$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Wilkins $\sigma_{WK} = 3000$ MPa, $a_{WK} = 2$ , $b_{WK} = 2$ . . . . .	118
6.22. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Wilkins correspondiente a un valor de $\sigma_{WK} = 3000$ MPa, $D_c = 35$ , $a_{WK} = 2$ y $b_{WK} = 2$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (24 % error) y 317 (12,8 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,5 %. . . . .	119
6.23. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente a los valores de los parámetros $\sigma_{WK} = 3000$ MPa, $D_c = 35$ , $a_{WK} = 2$ y $b_{WK} = 2$ . . . . .	120
6.24. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente a los valores de los parámetros $\sigma_{WK} = 3000$ MPa, $D_c = 35$ , $a_{WK} = 2$ y $b_{WK} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	121

6.25. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente a los valores de los parámetros $\sigma_{WK} = 3000 MPa$ , $D_c = 35$ , $a_{WK} = 2$ y $b_{WK} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	122
6.26. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $Fr_{1JC}$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ , $Fr_{4JC} = 0.0175$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . . . . .	123
6.27. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $Fr_{3JC}$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{4JC} = 0.0175$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . . . . .	124
6.28. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $Fr_{4JC}$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . . . . .	125
6.29. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $Fr_{5JC}$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ y $Fr_{4JC} = 0.0175$ . . . . .	126
6.30. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Johnson - Cook correspondiente a un valor de $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ , $Fr_{4JC} = 0.0175$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (22,7 % error) y 317 (13,5 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,6 %. . . . .	127
6.31. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente a un valor de $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ , $Fr_{4JC} = 0.0175$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . . . . .	128

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

6.32. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente a un valor de $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ , $Fr_{4JC} = 0.0175$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	129
6.33. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente a un valor de $Fr_{1JC} = 2.5$ , $Fr_{2JC} = 1.55$ , $Fr_{3JC} = -1.45$ , $Fr_{4JC} = 0.0175$ y $Fr_{5JC} = 0.125$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	130
6.34. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $C_1$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki $C_2 = 6$ , $C_3 = 6,5$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . . . . .	131
6.35. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $C_2$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki $C_1 = 12$ , $C_3 = 6,5$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . . . . .	132
6.36. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $C_3$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki $C_1 = 12$ , $C_2 = 6$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . . . . .	133
6.37. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $C_4$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki $C_1 = 12$ , $C_2 = 6$ , $C_3 = 6,5$ y $m_{XW} = 2$ . . . . .	134
6.38. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Xue - Wierzbicki correspondiente a un valor de $C_1 = 12$ , $C_2 = 6$ , $C_3 = 6,5$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (23,5 % error) y 317 (11,9 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,2 %. . . . .	135
6.39. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente a un valor de $C_1 = 12$ , $C_2 = 6$ , $C_3 = 6,5$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . . . . .	136

6.40. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente a un valor de $C_1 = 12$ , $C_2 = 6$ , $C_3 = 6,5$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	137
6.41. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente a un valor de $C_1 = 12$ , $C_2 = 6$ , $C_3 = 6,5$ , $C_4 = 0,25$ y $m_{XW} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	138
6.42. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $S$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo correspondiente a un valor de $\beta_D = 0,75$ , $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . . . . .	140
6.43. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $D_c$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $\beta_D = 0,75$ y $p_D = 0,075$ . . . . .	141
6.44. Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$ de 280 a 423) en función del parámetro $\beta_D$ para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . . . . .	142
6.45. Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) correspondientes a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $\beta_D = 0,75$ , $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . El error máximo en la predicción de las velocidades de impacto obtenido en las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 6,2%. . . . .	144
6.46. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$ correspondiente a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $\beta_D = 0,75$ , $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . . . . .	145
6.47. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ correspondiente a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $\beta_D = 0,75$ , $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	146

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

6.48. Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ correspondiente a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $\beta_D = 0,75$ , $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. . . . .	147
6.49. Velocidad residual ( $v_r$ ) obtenida experimentalmente y en las simulaciones frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ). (CES) Deformación plástica equivalente acumulada constante, (MS) Máxima tensión de cortadura, (CLOH) Cockcroft - Latham modificado por Oh, (WK) Wilkins, (JC) Johnson-Cook, (XW) Xue- Wierzbicki, (Dam) Daño Isótropo, (Exp) Experimental . . . . .	149
6.50. Campo de temperaturas para $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ , $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$ y $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ para los criterios de fallo, deformación plástica equivalente acumulada, máxima tensión de cortadura y de Cockcroft - Latham modificado por Oh . . . . .	150
6.51. Campo de temperaturas para $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ , $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$ y $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ para los criterios de fallo de Wilkins, de Johnson-Cook y de Xue-Wierzbicki . . . . .	151
6.52. Campo de temperaturas para $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ , $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$ y $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$ para el criterio de daño isótropo . . . . .	152
7.1. Modelo de corte ortogonal . . . . .	158
7.2. Modelo de corte oblicuo . . . . .	159
7.3. Modelo de corte con los parámetros más representativos . . . . .	161
7.4. Zonas de deformación del proceso de corte en aleaciones metálicas . . . . .	162
7.5. Detalle de la zona de deformación terciaria del proceso de corte con indicación del punto de remanso y las líneas de flujo del material . . . . .	163
7.6. Micrografía de viruta continua . . . . .	165
7.7. a) esquema de una viruta de filo recrecido (Build Up Edge) b) Micrografía de viruta de filo recrecido . . . . .	165
7.8. Micrografía de viruta discontinua. . . . .	166
7.9. Micrografía de viruta segmentada. . . . .	167
7.10. Micrografía de viruta segmentada tomada en un experimento de "parada rápida".	167
7.11. Micrografía de viruta segmentada de Ti6Al4V obtenida en un ensayo de corte ortogonal a una velocidad de 1.2 m/s. (33) . . . . .	169
7.12. Micrografía de viruta segmentada de Ti6Al4V obtenida en un ensayo de corte ortogonal a una velocidad de 13 m/s. (33) . . . . .	169

7.13. Pieza de trabajo y sistema de medida de fuerza situados en el torno. Detalle de la dirección de avance de la herramienta de corte . . . . .	171
7.14. Fuerzas de corte y Avance correspondientes a un avance de 100 micras y velocidad de corte $120 \frac{m}{min}$ . . . . .	171
7.15. Fuerzas de corte y avance en función de la velocidad de corte para un avance de 0.05 mm . . . . .	172
7.16. Fuerzas de corte y avance en función de la velocidad de corte para un avance de 0.10 mm . . . . .	172
7.17. Fuerzas de corte y avance en función de la velocidad de corte para un avance de 0.15 mm . . . . .	173
7.18. Morfología de viruta observada al microscopio indicando parámetros geométricos para cuantificar segmentación de la viruta (caso correspondiente al avance 0.05mm y velocidad de corte $4 \frac{m}{s}$ ) . . . . .	174
7.19. Morfología de viruta observada al microscopio indicando parámetros geométricos para cuantificar segmentación de la viruta (caso correspondiente al avance 0.10mm y velocidad de corte $4 \frac{m}{s}$ ) . . . . .	174
7.20. Morfología de viruta observada al microscopio indicando parámetros geométricos para cuantificar segmentación de la viruta (caso correspondiente al avance 0.15mm y velocidad de corte $4 \frac{m}{s}$ ) . . . . .	175
7.21. Esquema del modelo utilizado para la simulación del corte ortogonal, indicando condiciones de contorno . . . . .	176
7.22. Campo de deformación plástica equivalente en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de $4 \frac{m}{s}$ y un avance de 0.050 mm. . . . .	178
7.23. Campo de temperatura normalizada en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de $4 \frac{m}{s}$ y un avance de 0.050 mm. . . . .	178
7.24. Campo de deformación plástica equivalente en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de $4 \frac{m}{s}$ y un avance de 0.10 mm. . . . .	179
7.25. Campo de temperatura normalizada en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de $4 \frac{m}{s}$ y un avance de 0.10 mm. . . . .	179

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

7.26. Campo de deformación plástica equivalente en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de $4 \frac{m}{s}$ y un avance de 0.150 mm. . . . .	180
7.27. Campo de temperatura normalizada en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de $4 \frac{m}{s}$ y un avance de 0.150 mm. . . . .	180
E.1. Descomposición de la tensión en sus partes desviadora $\sigma^D$ y esférica $\sigma^{ef}$ . . . . .	216
E.2. Superficie de plastificación según el criterio de plastificación de tipo $J_2$ representado en el espacio de las tensiones principales . . . . .	217
E.3. Descomposición del tensor $\sigma \bar{\sigma}_b^R$ en sus partes desviadora $\bar{\sigma}_D^{DR} - \bar{\sigma}_{bD}^R$ y esférica $\bar{\sigma}_D^{efR}$ . . . . .	218
E.4. Superficie de plastificación según el criterio de plastificación de tipo $J_2$ representado en el espacio de las tensiones principales de $\sigma \bar{\sigma}_b$ . . . . .	219

# Índice de tablas

2.1. Modelos de fallo basados en Cockcroft y Latham . . . . .	24
2.2. Modelos de fallo basados en Cockcroft y Latham corregidos con el endurecimiento cinemático . . . . .	24
3.1. Marco Termodinámico . . . . .	43
3.2. Funciones de plastificación de tipo $J_2$ . . . . .	46
3.3. Parámetros JC . . . . .	48
3.4. Parámetros Endurecimiento Cinemático . . . . .	52
5.1. Propiedades de la aleación Ti-6Al-4V . . . . .	86
5.2. Resultados experimentales de los ensayos de impacto a alta velocidad. . . . .	88
6.1. Valores de las propiedades físicas y de los diferentes parámetros que caracterizan el comportamiento mecánico de la aleación Ti6Al4V . . . . .	94
6.2. Parámetros del criterio de fallo de Wilkins que mejor ajustan la curva velocidad de impacto - velocidad residual . . . . .	119
6.3. Parámetros del criterio de fallo de Johnson - Cook que mejor ajustan la curva velocidad de impacto - velocidad residual . . . . .	126
6.4. Parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki que mejor ajustan la curva velocidad de impacto - velocidad residual . . . . .	134
6.5. Conjunto de parámetros del modelo de daño que mejor ajustan la velocidad resi- dual en los puntos de control de la tabla 6.6 . . . . .	142



## ÍNDICE DE TABLAS

---

6.6. Resultados de la simulación numérica y de los ensayos experimentales. La comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos en las simulaciones numéricas muestran un ajuste razonable entre ellos, siendo la diferencia en todos los casos menor que 6.5 %. Los resultados simulados son los correspondientes a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo $S = 850$ MPa, $\beta_D = 0,75$ , $p_D = 0,075$ y $D_c = 0,65$ . Los puntos de control seleccionados para el ajuste para la calibración de los parámetros de daños se resaltan en negrita. . . .	143
6.7. Resultados de los distintos criterios de fallo analizados. Para cada criterio de fallo y para cada velocidad de impacto se muestra el error en la predicción de la velocidad residual.(CES) Deformación plástica equivalente acumulada constante, (MS) Máxima tensión de cortadura, (CLOH) Cockcroft - Latham modificado por Oh, (WK) Wilkins, (JC) Johnson-Cook, (XW) Xue- Wierzbicki, (Dam) Daño Isótropo . . . . .	149
7.1. Datos de corte para avance 0.05mm . . . . .	181
7.2. Datos de corte para avance 0.10mm . . . . .	182
7.3. Datos de corte para avance 0.15mm . . . . .	182

# Nomenclatura

$\bar{a}_{ij}$	Términos $ij$ de un tensor de segundo orden
$a_{n+1}$	Magnitud $a$ evaluada en el instante $t_{n+1}$
$a_{n+1}^{k+1}$	Magnitud $a_{n+1}$ evaluada en la iteración $k + 1$
$a_{,x}$	Derivada parcial de la magnitud $a$ respecto a la variable $x$
$\bar{a}^D$	Parte desviadora del tensor $\bar{a}$
$\dot{\bar{a}}$	Derivada temporal del tensor $\bar{a}$
$C$	Tensor lineal elástico isótropo
$C_\alpha$	Coefficiente no lineal del endurecimiento cinemático
$C_{\sigma_b}$	Coefficiente lineal del endurecimiento cinemático
$c_v$	Calor específico
$D$	Daño isótropo
$E$	Módulo de Young
$F$	Potencial de disipación
$F_D$	Potencial de disipación debido al daño
$F_{\sigma_b}$	Potencial de disipación debido al endurecimiento cinemático
$\bar{F}$	Gradiente de deformación
$f$	Función de plastificación
$G$	Módulo de cizalladura

## NOMENCLATURA

---

$h_i$	Variable de estado interna asociada al endurecimiento isótropo
$\bar{h}_\kappa$	Variable de estado interna asociada al endurecimiento cinemático
$J_{ad}$	Matriz Jacobiana para el problema adiabático
$J_{n-ad}$	Matriz Jacobiana para el problema no adiabático
$K$	Módulo de compresibilidad
$M_{CTO}$	Tensor de cuarto orden del Operador Tangente Consistente
$p$	Deformación plástica equivalente acumulada
$p_D$	Parámetro de umbral de deformación plástica equivalente acumulada del modelo de daño
$R$	Endurecimiento Isótropo
$\bar{\mathcal{R}}_{ad}$	Vector residual para el problema adiabático
$\bar{\mathcal{R}}_{n-ad}$	Vector residual para el problema no adiabático
$S$	Parámetro asociado a la energía del modelo de daño
$\beta_D$	Exponente asociado al término de energía del modelo de daño
$T$	Temperatura
$T_m$	Temperatura de fusión del material
$T_0$	Temperatura de referencia
$W^D$	Potencia de disipación específica debida al daño
$W^p$	Potencia de disipación específica debida a la deformación plástica
$W^{Tot}$	Potencia de disipación específica total
$Y$	Tasa de liberación de densidad de energía
$\alpha$	Coefficiente lineal de dilatación térmica
$\bar{\epsilon}$	Tensor de deformación
$\bar{\epsilon}^e$	Parte elástica del tensor de deformación

$\bar{\epsilon}^p$	Parte plástica del tensor de deformación
$\bar{\epsilon}^T$	Parte asociada a la dilatación del tensor de deformación
$\eta_{QT}$	Coefficiente de Quinney-Taylor
$\lambda_L$	Primer parámetro de Lamé
$\Delta\lambda$	Incremento del multiplicador plástico
$\dot{\lambda}$	Derivada temporal del multiplicador plástico
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidad
$\rho_0$	Densidad de referencia
$\sigma_{eq}$	Tensión equivalente
$\bar{\alpha}$	Tensor de la variable de estado asociada al endurecimiento cinemático
$\bar{\sigma}$	Tensor de tensión
$\tilde{\sigma}$	Tensor de tensión efectiva
$\bar{\sigma}_b$	Tensor de tensión asociado al endurecimiento cinemático

## NOMENCLATURA

---

# 1

## Introducción y Objetivos

### 1.1. Motivación

Los procesos que implican grandes deformaciones y rotura dúctil del material en condiciones dinámicas son habituales en ingeniería. Entre otros es posible destacar los procesos de fabricación por conformado y corte, impacto sobre blindajes y protecciones personales, el choque de estructuras de vehículos, etc.. También es frecuente que en estos procesos se den condiciones termomecánicas complejas y estados de carga multiaxiales además de elevadas velocidades de deformación.

Las propiedades mecánicas de la mayoría de los metales y aleaciones dependen de la velocidad de deformación y de la temperatura. Los procesos que implican grandes deformaciones originan también un incremento de la temperatura debido a la disipación del trabajo plástico y en estos casos el problema no puede ser considerado como isoterma. Es habitual que en procesos a elevadas velocidades de deformación, como el mecanizado a alta velocidad o el impacto de proyectiles, se observe la aparición de las denominadas bandas adiabáticas de cortadura. Se producen grandes deformaciones y estas se encuentran muy localizadas como se puede comprobar en las observaciones experimentales. A elevadas velocidades de deformación las bandas adiabáticas de cortadura son desencadenadas por un incremento adiabático y altamente localizado de la temperatura, el cual incrementa fuertemente el ablandamiento térmico de la mayoría de los metales y aleaciones en un estrecho volumen. En tales circunstancias también son relevantes los efectos viscoplásticos, en particular el efecto del endurecimiento debido a las elevadas velocidades de deformación, que tiene un efecto estabilizador.

No menos importantes son los procesos de ingeniería en los que se produce el fallo del material, ya sea por estar sometido a cargas cíclicas importantes o por sufrir estados de carga que

## 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

---

provocan deformaciones considerables. Cuando los metales y sus aleaciones se someten a cargas cíclicas por encima de su límite elástico, se observa el denominado efecto Bauschinger, que como expresión más simple muestra un comportamiento no simétrico del material respecto a las cargas de tracción y de compresión, demostrando que la respuesta de un material a una acción mecánica no sólo depende del estado actual de tensión que soporta, sino también de la historia de deformaciones plásticas que ha sufrido. Este comportamiento no simétrico se debe a que una vez superadas las condiciones de carga elástica, en el espacio de las tensiones principales, el lugar de plastificación se desplaza en la dirección de la carga produciéndose lo que se denomina como endurecimiento cinemático.

El estudio de los procesos y condiciones que conducen al fallo del material tiene un interés creciente en distintas industrias. Este interés ha motivado que en los códigos comerciales de elementos finitos se hayan implementado diversos criterios de fallo. La aplicación correcta de dichos modelos requiere un conocimiento elevado de los mecanismos de fallo que corresponde a un determinado material, así como la calibración experimental de los parámetros del modelo.

En general el fallo del material se produce por un deterioro progresivo, irreversible y acumulativo del material conocido como daño. Desde un punto de vista físico, el daño dúctil se produce esencialmente por una de-cohesión atómica seguida por el apilamiento de dislocaciones y finalmente el crecimiento y coalescencia de cavidades inducidas por las grandes deformaciones de agujeros esféricos o elípticos producidos en un medio plástico sometido a grandes deformaciones. Desde el punto de vista de la Mecánica de Daño en Medios Continuos, el daño es una reducción del área resistente en cualquier plano de un Elemento de Volumen Representativo que está gobernado por la energía elástica y la deformación plástica acumulada.

Un modelo de daño ampliamente aceptado es el propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32). Sin embargo no se ha encontrado su implementación en los códigos comerciales de elementos finitos usuales. Esto puede ser debido a la complejidad del algoritmo numérico que proponen J. Lemaitre y R. Desmorat y lo poco eficiente que parece, desde un punto de vista computacional, al requerir calcular e invertir en cada iteración de cada paso temporal una matriz Jacobiano de un tamaño considerable (28x28).

De todo lo anterior podemos concluir que los procesos de ingeniería antes mencionados presentan una naturaleza no lineal y a la vez muy localizada, en los que intervienen fenómenos

termomecánicos complejos que obligan a emplear técnicas de cálculo basadas en el método de los elementos finitos. Por ello, para una comprensión adecuada del comportamiento de las aleaciones metálicas en un amplio rango de temperaturas y velocidades de deformación así como en condiciones de carga complejas, es necesario plantear un modelo constitutivo que recoja adecuadamente el comportamiento del material y que por tanto deberá considerar:

- La historia de deformaciones plásticas y en particular el endurecimiento isótropo y el endurecimiento cinemático.
- Los efectos térmicos tales como el ablandamiento térmico y la dilatación térmica.
- Los efectos viscoplásticos como el efecto del endurecimiento debido a la velocidad de deformación.
- Los mecanismos o procesos que provocan el deterioro progresivo del material durante su deformación y conducen al fallo.

Igual de importante que plantear un modelo constitutivo que refleje y modele adecuadamente el comportamiento del material, es el desarrollo de algoritmos de integración eficientes de dichas ecuaciones constitutivas que permitan obtener resultados fiables en tiempos razonables.

## 1.2. Objetivos

El establecimiento de modelos predictivos de fallo tiene numerosas aplicaciones prácticas para la industria. El sector aeroespacial, la industria del automóvil y la industria de defensa en general tratan con diferentes materiales y mecanismos de fallo que pueden implicar el fallo de materiales dúctiles bajo condiciones de carga cuasi-estática o monótona, la fractura frágil de metales sujetos a cargas cíclicas y fractura de componentes sometidos a impacto.

Los modos de fallo pueden variar de unos materiales a otros. Durante décadas, los investigadores han buscado modelos de fallo que pueda dar resultados válidos en todo tipo de condiciones de carga (tensión, compresión, cortadura, altas y bajas velocidades de deformación) y teniendo en cuenta la variación de la temperatura. Este objetivo está lejos de alcanzarse y, hasta el momento, no se ha desarrollado un modelo que cubra todas las configuraciones de carga posibles, en su lugar se han desarrollado una multitud de modelos que son válidos cuando se aplican a un determinado estado de carga.



## 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

---

Uno de los modelos de fallo más completo y prometedor es el modelo de fallo por daño propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32). El procedimiento de integración de este modelo tal y como lo plantean sus autores conlleva una gran complejidad además de ser computacionalmente poco eficiente en comparación con otros modelos de fallo. Esto se debe a que tratan de resolver de manera similar los cuatro modelos de daño que proponen (daño isótropo y anisótropo con y sin Efecto de Cierre de Microdefectos (“Micro-defects Closure Effect”)).

En esta Tesis Doctoral se ha tratado de resolver esta desventaja desarrollando un nuevo algoritmo de integración para el modelo de daño isótropo. Este nuevo algoritmo es mucho más sencillo y eficiente, desde el punto de vista computacional, que el propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat lo que permite analizar la aplicabilidad y la validez de este modelo de fallo a diversos problemas. En concreto en esta Tesis se ha aplicado al estudio del impacto a alta velocidad y al mecanizado a alta velocidad de corte. También se ha comparado con otros modelos de fallo propuestos por otros autores, algunos de ellos ya implementados en códigos comerciales de elementos finitos. Para ello se ha utilizado el código de elementos finitos ABAQUS y se ha implementado la subrutina VUMAT con el objeto de ajustar y validar diferentes criterios de fallo, además del de daño isótropo, ajustando los resultados de las simulaciones de ensayos de impacto a los resultados experimentales desarrollados en esta Tesis Doctoral.

A la vista de la revisión realizada del estado del arte, se han formulado una serie de objetivos que pretenden cubrir distintas carencias detectadas en cuanto a la implementación de modelos de daño y fallo para simulación numérica de procesos dinámicos. La presente Tesis Doctoral se centrará en los siguientes objetivos:

- Formular e implementar dentro de un código de elementos finitos comercial un algoritmo de integración numérica, eficiente desde el punto de vista computacional, del modelo de daño isótropo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32).
- Extender el modelo de daño isótropo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) para condiciones no isotermas
- Implementar dentro de un código de elementos finitos distintos modelos de fallo, incluido el daño isótropo, que permita la evaluación, validación y comparación de los mismos aplicados a problemas de impacto a alta velocidad y al mecanizado a alta velocidad de corte.

- Ajustar los parámetros que caracterizan cada modelo de fallo para, en la medida de lo posible, hacer coincidir los resultados de las simulaciones con los resultados experimentales obtenidos en ensayos de impacto a alta velocidad
- Analizar y comparar los resultados obtenidos por cada uno de los modelos de fallo implementados

### 1.3. Aportaciones originales de la Tesis

Las aportaciones de esta Tesis Doctoral se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Se ha simplificado notablemente el algoritmo implícito de integración para un modelo constitutivo termoviscoplastico completamente acoplado con el modelo de daño isótropo propuesto por Lemaitre y Desmorat. El algoritmo propuesto requiere la construcción de una matriz Jacobiana de pequeño tamaño (3x3) en lugar de la matriz Jacobiana propuesta por Lemaitre y Desmorat (28x28)
- El algoritmo de integración desarrollado incorpora al modelo propuesto por Lemaitre y Desmorat los efectos térmicos que no son desarrollados explícitamente por estos autores. En particular se incluye la dilatación térmica y el ablandamiento térmico.
- El algoritmo de integración desarrollado es de uso general siendo por tanto válido para estados de carga tridimensionales y aplicable a modelos constitutivos viscoplasticos incluyendo el endurecimiento isótropo y cinemático, así como los efectos de la velocidad de deformación y daño isótropo.
- El algoritmo desarrollado puede ser directamente aplicable a modelos constitutivos que consideren simultáneamente el endurecimiento isótropo y el cinemático sin necesidad de incluir daño, siendo el coste computacional similar al del algoritmo clásico de retorno radial que considera el endurecimiento isótropo exclusivamente.
- El esquema de integración numérica propuesto en esta Tesis Doctoral se ha aplicado con éxito a la simulación de ensayos en condiciones dinámicas. Para ello se ha empleado la subrutina de usuario VUMAT disponibles en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/explicit, demostrando su eficacia y robustez.
- Se ha formulado una expresión para el operador tangente consistente con el algoritmo de integración.

## 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

---

Como resumen se ha conseguido desarrollar un algoritmo numérico de integración de propósito general y eficiente, válido para estados de carga tridimensionales y aplicable a modelos constitutivos termoviscoplasticos incluyendo la dilatación térmica, el ablandamiento térmico, el endurecimiento isótropo y cinemático, así como los efectos de la velocidad de deformación y el daño isótropo. El algoritmo resultante es implícito en todas las variables y totalmente acoplado con el daño isótropo.

### 1.4. Contenido de la Tesis

Esta Tesis Doctoral, además de esta introducción se compone del Capítulo 2: Antecedentes; en el que se resumirán brevemente los trabajos más relevantes en línea con los objetivos de esta Tesis Doctoral y con el modelo constitutivo planteado por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) que se ha tomado como referencia con el objeto de ampliarlo y mejorarlo. También se describen brevemente algunos de los criterios de fallo más destacables que posteriormente se implementarán en la subrutina VUMAT con el fin de comparar las prestaciones de cada uno de ellos. El Capítulo 3: Modelo Constitutivo; se centra en la formulación de las ecuaciones constitutivas, tomadas como referencia en esta Tesis Doctoral, que rigen el comportamiento mecánico de las aleaciones metálicas, teniendo en cuenta los fenómenos reversibles (deformación elástica y la expansión térmica) y fenómenos irreversibles (endurecimientos isótropo y cinemático y daño). Se describen las leyes de evolución de la deformación plástica, endurecimiento isótropo, endurecimiento cinemático y daño, así como de la temperatura todas ellas totalmente acopladas a la disipación de energía debido al trabajo plástico y el daño del material. Este modelo constitutivo se basa en el propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) en el que se ha incluido los efectos asociados a la dilatación y el ablandamiento térmicos así como el endurecimiento asociado a la velocidad de deformación. El Capítulo 4: Resolución Numérica; se centra en el desarrollo de un algoritmo numérico eficiente, basado en la integración de las leyes de la evolución totalmente acopladas establecidas en el Capítulo 3. Este algoritmo numérico eficiente reduce el conjunto de incógnitas tensoriales y escalares consideradas en las ecuaciones constitutivas a un sistema de ecuaciones no lineales compuesta de tres ecuaciones escalares y tres incógnitas escalares. Aunque todo el desarrollo del algoritmo numérico es independiente del modelo termoviscoplastico, se aplica al modelo de Johnson-Cook, que se utilizará en la aplicación y posterior validación del algoritmo numérico. El Capítulo 5: Ensayos de impacto sobre Ti 6Al-4V; presenta una breve descripción de las propiedades de la aleación analizada en los ensayos de impacto de alta velocidad y se muestran los resultados experimentales obtenidos. El Capítulo 6: Calibración y Validación; describe el procedimiento seguido para obtener los parámetros correspondientes a cada uno de los criterios

de fallo que se describieron en el apartado 2.4 y muestra los resultados obtenidos por cada uno de ellos en comparación con los resultados experimentales. El Capítulo 7: Aplicación al Corte Ortogonal se analiza la validez de los modelos implementados para la simulación de procesos de corte. Para ello se han llevado a cabo ensayos de corte ortogonal sobre la aleación Ti6Al4V y se ha desarrollado un modelo numérico basado en EF de corte ortogonal. Por último el Capítulo 8: Conclusiones y Trabajos Futuros presenta las conclusiones y aportaciones originales de esta Tesis Doctoral y plantea los trabajos futuros que se pretenden abordar. Adicionalmente el Apéndice A Operadores Tensoriales presenta la definición de diversos operadores tensoriales utilizados a lo largo de esta Tesis Doctoral. El Apéndice B Variables Intermedias detalla las expresiones de diversas variables intermedias y sus derivadas que ayudan a simplificar las expresiones del algoritmo desarrollado. El Apéndice C Matriz Jacobiana detalla las expresiones de los términos de la matriz Jacobiana necesarios en el procedimiento de resolución explicado en el Capítulo 4 junto con algunas de sus derivadas parciales necesarias en el procedimiento de resolución del algoritmo. El Apéndice D Detalle de la deducción de expresiones detalla como se han deducido algunas expresiones utilizadas en esta Tesis Doctoral y que han permitido simplificar y optimizar el algoritmo de resolución. Por último, el Apéndice E Superficie de Plastificación tipo  $J_2$  muestra como el endurecimiento cinemático afecta a la superficie de plastificación y sirve para justificar como se deben modificar algunos de los criterios de fallo descritos en el apartado 2.4 Criterios de Fallo para considerar el endurecimiento cinemático.

## 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

---

## 2

# Antecedentes

### 2.1. Introducción

La mayoría de las aleaciones metálicas muestran un comportamiento no lineal a medida que experimentan deformación plástica y cambios de temperatura. Este comportamiento no lineal está asociado al acoplamiento de los endurecimientos isótropo y cinemático con el cambio de temperatura y el deterioro o degradación progresiva del material, los cuales dependen habitualmente de la deformación plástica acumulada y de la velocidad de deformación plástica entre otros.

El análisis del comportamiento del material bajo una amplia gama de condiciones de carga, incluyendo estados de carga tridimensionales, requiere desarrollar un algoritmo numérico eficiente y optimizado para integrar las ecuaciones del modelo constitutivo del material, incluyendo la degradación progresiva del material, los efectos térmicos y el endurecimiento, tanto isótropo como cinemático. Varios autores han propuesto algoritmos de integración incluyendo parcialmente los fenómenos descritos anteriormente.

En este sentido hay que destacar que el modelo constitutivo planteado por J. Lemaitre y R. Desmorat tiene en consideración, además del daño, un modelo de endurecimiento isótropo y también el endurecimiento cinemático. Para el daño plantean cuatro modelos diferentes que presentan una complejidad creciente. El modelo de daño más simple es el de daño isótropo. Este modelo considera el daño como una variable escalar que representa una disminución de la superficie resistente.

El siguiente modelo de daño en complejidad es el daño isótropo considerando el denominado “Efecto de Cierre de Microdefectos” (“Microdefects Closure Effect”). Este efecto tiene en cuenta

## 2. ANTECEDENTES

---

que para la mayoría de los materiales, en determinadas condiciones de carga, los microdefectos se pueden cerrar durante la compresión. Este posible cierre parcial de las microfisuras aumenta el área resistente capaz de soportar la carga en compresión y por tanto la rigidez puede ser recuperada parcial o totalmente.

El tercer modelo de daño en complejidad es el daño anisótropo en el cual el daño está modelado por un tensor de segundo orden de manera que el área resistente del material es dependiente de la orientación en la que se ejerza la carga pero sin distinguir si la carga es de tracción o compresión. El último modelo de daño propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat es el daño anisótropo considerando el “Efecto de Cierre de Microdefectos”.

El algoritmo numérico de integración propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) está orientado a resolver de una manera general los cuatro modelos de daño sin aprovechar las ventajas numéricas y computacionales que se pueden obtener si se considera el modelo mas simple de daño isótropo tal y como se propone y desarrolla en esta Tesis Doctoral. En este sentido, el algoritmo numérico de integración que describen J. Lemaitre y R. Desmorat propone construir una matriz Jacobiana de  $28 \times 28$  que debe ser invertida cada iteración del esquema Newton-Raphson y para cada incremento de tiempo del esquema totalmente implícito de Euler. Como se mostrará en esta Tesis Doctoral, para el modelo de daño isótropo, el mismo problema puede reducirse a construir una matriz Jacobiana de  $2 \times 2$  si la temperatura es una entrada externa, o a construir una matriz de  $3 \times 3$  si la suposición de problema adiabático es valida y la temperatura es una incógnita más del problema.

En las secciones siguientes se hará un breve repaso de los trabajos más relevantes en línea con los objetivos de esta Tesis Doctoral y con el modelo constitutivo planteado por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) que hemos tomado como referencia con el objeto de ampliarlo y mejorarlo.

### 2.2. Endurecimiento isótropo y cinemático

El endurecimiento de la mayoría de las aleaciones metálicas parece ser una combinación del endurecimiento isótropo y cinemático que modelan de manera apropiada el cambio del volumen, en el espacio de las tensiones principales, de la superficie de plastificación. Para el endurecimiento isótropo los investigadores han desarrollado diversos modelos, algunos de ellos solo consideran la deformación plástica acumulada, otros además incluyen la temperatura y los efectos viscoplásti-

cos, etc..

El endurecimiento isótopo  $\sigma_I$  está relacionado con la densidad de las dislocaciones y representa el crecimiento del tamaño de la superficie de plastificación. El modelo estándar de J. Lemaitre y R. Desmorat (32) supone un modelo de endurecimiento isótopo exponencial con la forma:

$$R(p, T, \dots) = \sigma_I(p) = \sigma_{I\infty}(1 - e^{(bp)}) \quad (2.1)$$

donde  $\sigma_{I\infty}$  y  $b$  son parámetros del material y  $p$  es la deformación plástica acumulada.

El endurecimiento cinemático está relacionado con la acumulación de las dislocaciones. A medida que el material experimenta una deformación plástica las dislocaciones se acumulan en las barreras de su red cristalina (precipitados, límites de grano) lo que da lugar a apilamientos e interacciones de las dislocación. El modelo de endurecimiento cinemático propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) sigue la forma no isoterma de la ley propuesta por Armstrong-Frederick.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\bar{\sigma}_b}{C_{\kappa 1}(T)} \right) = \left[ \dot{\epsilon}^p - 2\dot{p}C_{\kappa 2}\bar{\sigma}_b \right] \quad (2.2)$$

donde  $\bar{\sigma}_b$  es el tensor de tensión asociado al endurecimiento cinemático,  $C_{\kappa 1}(T)$  y  $C_{\kappa 2}$  son respectivamente el coeficiente no lineal y lineal del endurecimiento cinemático y  $\dot{\epsilon}^p$  es la componente plástica del tensor de deformación. La inclusión del endurecimiento cinemático permite modelar de una manera fácil y precisa la respuesta de un material a condiciones de carga cíclicas.

Los parámetros que caracterizan el endurecimiento cinemático e isótopo, en general, son dependientes de la temperatura, sin embargo el algoritmo de integración de las ecuaciones del modelo constitutivo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) no incluye la temperatura obviando por tanto tal dependencia así como el efecto de la dilatación térmica y el ablandamiento térmico. Por otra parte tampoco considera el efecto de la velocidad de deformación en el modelo constitutivo.

### 2.2.1. Viscoplasticidad

La viscoplasticidad, como una rama de la mecánica de sólidos, analiza el efecto de la velocidad de deformación sobre las propiedades mecánicas del material. Cuando la velocidad de deformación plástica se incluye en el endurecimiento isótopo, se pueden seguir dos modelos principales de viscoplasticidad: el denominado “modelo de consistencia” (“consistency model”)



## 2. ANTECEDENTES

---

y el denominado “modelo de sobretensión” (“overstress model”).

El denominado “modelo de consistencia” fue inicialmente propuesto por W. M. Wang (53) y W. M. Wang et al. (54) y usado por otros (M. Ristinmaa y N. S. Ottosen (46); A. Winnicki et al. (57); O. M. Heeres (19)). Esta aproximación de la viscoplasticidad puede ser modelada por la incorporación de la dependencia temporal en la función de plastificación, la cual junto con la condición de consistencia, cumple la clásica regla de Kuhn-Tucker. El “modelo de consistencia” considera que la superficie de plastificación es capaz de expandirse o contraerse dependiendo no sólo de la deformación sino también dependiendo de la velocidad de deformación y la temperatura. La condición de consistencia de la función de plastificación  $f$  obliga a incluir los efectos de la velocidad de deformación como por ejemplo en la siguiente expresión:

$$f(\bar{s}_v, \dot{\bar{s}}_v) = 0 \quad si \quad \dot{\lambda} > 0 \quad (2.3)$$

donde  $\bar{s}_v$  es un vector que incluye todas las variables de estado y  $\lambda$  es el denominado multiplicador plástico.

La segunda aproximación para describir los efectos de la viscoplasticidad es el denominado “modelo de sobretensión” que fue originalmente propuesto por P. Perzyna (42). En este caso la condición de consistencia no se cumple y el estado de tensiones puede encontrarse fuera de la superficie de plastificación y por lo tanto la condición de Kuhn-Tucker no es aplicable. Esta aproximación es ampliamente usada en la formulación de la viscoplasticidad y cuya principal característica reside en que la función de plastificación puede tomar valores mayores que cero cuyo efecto es conocido como *sobretensión* (*overstress*).

R. Zaera y J. Fernández-Sáez (58) desarrollaron un algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas de un modelo termoviscoplastico de plasticidad  $J_2$  suponiendo unas condiciones adiabáticas y deformaciones finitas, extendiendo el “modelo de consistencia viscoplastico” propuesto por W. M. Wang et al. (54). En ese trabajo la función de plastificación incluye no solo la velocidad de deformación sino también el efecto de la temperatura sobre la función de plastificación. Usando un Euler implícito como esquema para integrar las ecuaciones constitutivas, los autores describen el algoritmo que conduce a unas expresiones generalizadas del clásico algoritmo de retorno radial para la plasticidad  $J_2$  tanto para el cálculo iterativo del incremento del multiplicador plástico como para el operador tangente consistente para aquellos casos en los que la velocidad de deformación como la temperatura son también consideradas variables de estado

de las ecuaciones de endurecimiento. A diferencia del trabajo desarrollado en esta Tesis Doctoral, el trabajo desarrollado por Zaera y Fernández-Sáez no incluye el endurecimiento cinemático ni el deterioro del material (daño) a medida que se incrementa la deformación plástica.

### 2.3. Deterioro del material.

Como se ha explicado en la Introducción de esta Tesis Doctoral, muchos procesos de ingeniería con frecuencia requieren el estudio y modelado del fallo o rotura macroscópica. En las aleaciones metálicas dúctiles este fallo o rotura macroscópica es debido a un deterioro progresivo y acumulativo del material conocido como daño. Desde un punto de vista físico, el daño dúctil se produce esencialmente por una de-cohesión atómica seguida por el apilamiento de dislocaciones y finalmente el crecimiento y coalescencia de cavidades inducidas por las grandes deformaciones de agujeros esféricos o elípticos producidos en un medio plástico sometido a grandes deformaciones. Desde el punto de vista de la Mecánica de Daño en Medios Continuos, el daño es una reducción del área resistente en cualquier plano de un Elemento de Volumen Representativo que está gobernado por la energía elástica y la deformación plástica acumulada.

Hay dos aproximaciones ampliamente usadas en la formulación del fallo dúctil. La primera se basa en modelos constitutivos micromecánicos y se deduce de análisis micromecánicos rigurosos como el modelo propuesto por A. L. Gurson (17) y mejorado posteriormente por V. Tvergaard y A. Needleman (50). Estos modelos permiten describir como las cavidades pueden nuclear en las vecindades de defectos, como crecen al experimentar deformación plástica y finalmente causan un mesocrack por coalescencia de las cavidades. Este modelo se suele conocer como modelo Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN).

La segunda aproximación se basa en modelos constitutivos fenomenológicos. Estos modelos se encuadran dentro de la teoría de la Mecánica del Daño Continuo (CDM por sus siglas en inglés Continuum Damage Mechanics). Esta teoría incorpora los efectos de la aparición, crecimiento y coalescencia de los microvacíos en las ecuaciones constitutivas del material permitiendo el estudio simultáneo de la evolución de la deformación, la tensión y el daño. Así, la mecánica del daño estudia, a través de variables mecánicas, los mecanismos involucrados en el deterioro de los materiales sometidos a cargas.

El desarrollo de la CDM comenzó con los trabajos de Kachanov y Rabotnov en 1958 en que se definió una variable escalar para modelizar el daño (isótropo) del material, si bien no

## 2. ANTECEDENTES

---

fue hasta 1972 en el que J. Hult introdujo la denominación de Continuum Damage Mechanics. Posteriormente se paso a establecer un modelo anisótropo del daño a través de una variable tensorial encuadrando estos desarrollos teóricos dentro de un marco termodinámico de los procesos irreversibles. En este sentido destaca el trabajo de Jean Lemaitre y Rodrigue Desmorat (32).

Conforme a la formulación fenomenológica, el daño puede ser representado por un magnitud escalar (daño isótropo  $D$ ) o por una magnitud tensorial (daño anisótropo  $\bar{D}$ ) que representan la reducción del área resistente debido a la presencia de micro defectos. Para tener en cuenta la diferente respuesta de un material dañado al ser sometido a un estado de tensiones de compresión y tracción, J. Lemaitre y R. Desmorat (32) propusieron una formulación que incluía el que denominaron “Efecto de Cierre de Microdefectos” (“Microdefects Closure Effect”).

La formulación propuesta por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) introduce el **principio de deformación equivalente**. Este principio establece que las ecuaciones constitutivas de un material dañado se deducen siguiendo la misma formulación que la del material sin daño, excepto que la tensión se sustituye por la tensión efectiva  $\tilde{\sigma}$ . La relación entre la tensión efectiva  $\tilde{\sigma}$  y la tensión de Cauchy  $\bar{\sigma}$  en el caso más simple de daños isótropo es:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{1 - D} \bar{\sigma} \quad (2.4)$$

Siguiendo la aproximación micromecánica se podría destacar el trabajo de G. Vadillo et al. (51). Este trabajo propone un procedimiento consistente de integración para la versión termoviscoplastica del modelo completo de Gurson. Estos autores desarrollan un algoritmo numérico implícito en todas las variables así como el correspondiente operador tangente suponiendo condiciones adiabáticas y usando un esquema de integración basado en Euler implícito. Este trabajo considera los efectos térmicos, el deterioro del material y los efectos de la velocidad de deformación pero el endurecimiento cinemático no es incluido en las ecuaciones constitutivas del modelo.

Siguiendo la aproximación “fenomenológica” diversos autores han desarrollado algoritmos numéricos de integración. F. H. Aboutalebi et al.(2) han desarrollado un algoritmo explícito para la integración numérica de las ecuaciones de evolución totalmente acopladas de un modelo elasto-plástico con daño. El modelo propuesto incluye el daño isótropo y el endurecimiento isótropo pero no tienen en cuenta los efectos térmicos ni el endurecimiento cinemático ni el endurecimiento debido a la velocidad de deformación. El algoritmo está basado en el conocido método del predictor elástico/corrector plástico y se centra en la elastoplasticidad de tensión

plana, reduciendo el problema a la resolución de una única ecuación no lineal formulada en la incógnita  $\Delta\lambda$  (el incremento del multiplicador plástico).

En un trabajo más reciente A. R. Khoei y M. Eghbalian (29) desarrollan un algoritmo de integración de las ecuaciones constitutivas de un modelo elastoviscoplastico con daño y dependiente de la velocidad de deformación considerando las ecuaciones del endurecimiento cinemático lineales y no lineales. El algoritmo de integración de ese trabajo utiliza el algoritmo de retorno radial en un esquema implícito desacoplado de daño y plasticidad. En una primera etapa, el algoritmo mantiene el daño constante y resuelve las ecuaciones constitutivas restantes. En el segundo paso, el daño se actualiza teniendo en cuenta las ecuaciones de evolución del daño y las variables de estado calculadas en el primer paso. Los efectos térmicos, la dilatación térmica y ablandamiento térmico, no se incluyen en las ecuaciones constitutivas. Además el modelo de viscoplasticidad sigue la aproximación basada en el *modelo de sobretensión* para el modelo de plasticidad dependiente de la velocidad de deformación en lugar de la aproximación basada en el *modelo de consistencia* que seguimos en esta Tesis Doctoral.

En esta Tesis Doctoral se ha desarrollado un algoritmo numérico de integración de un modelo termoviscoplastico considerando una superficie de plastificación genérica tipo  $J_2$  que incluye el endurecimiento isótropo en combinación con el endurecimiento cinemático y ambos acoplados con el daño del material. No obstante, para una simulación precisa de los procesos mecánicos que involucran un amplio rango de condiciones de carga y temperatura, es recomendable el uso de expresiones de la función de plastificación que incorporen de manera adecuada la influencia de la temperatura, la deformación plástica y la velocidad de deformación plástica. Por expresiones de tipo  $J_2$  nos referimos a todas aquellas expresiones de la superficie de plastificación de la forma establecida en 2.5.

$$f = (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq} - R(p, \dot{p}, T, \dots) = 0 \quad (2.5)$$

Como se mostrará más adelante, a partir de la comparación de los resultados experimentales de ensayos de impacto y mecanizado a alta velocidad de corte con los obtenidos por las simulaciones numéricas, el modelo de daño isótropo se considera válido para reproducir el deterioro del material a medida que se somete a deformación plástica, ayudando a simular y analizar el fallo del material. No obstante existen diversos criterios de fallo más simples que el modelo de daño, descritos en el apartado 2.4 Criterios de Fallo, que se van a analizar y comparar con el mismo.

## 2. ANTECEDENTES

---

### 2.4. Criterios de Fallo

Habitualmente, el fallo de un material aparece como resultado de un proceso físico complejo que ocurre a escala micromecánica. A escala macroscópica las únicas variables que controlan el fallo son los valores actuales de los tensores de deformación y tensión así como su historia. Todas estas variables son accesibles en los códigos comerciales de elementos finitos a través de las subrutinas de usuario que ofrecen.

Para la introducción de los criterios de fallo en los códigos de elementos finitos se pueden seguir diversas aproximaciones dependiendo del nivel de acoplamiento entre las variables térmicas y mecánicas y las variables que determinan el deterioro del material que establece cada criterio de fallo. La aproximación más simple, denominado método desacoplado, es aquella en la que la variable que mide el deterioro del material no está acoplada con las variables térmicas y mecánicas de manera que es posible calcular el estado de temperaturas, tensiones y deformaciones de cada elemento sin tener en cuenta su estado de deterioro y posteriormente evaluar las variables que miden el estado de degradación del material y determinar si se cumple o no el criterio de fallo.

Cuando existe relación entre las ecuaciones constitutivas del material, que determinan los campos de temperaturas, tensiones y deformaciones, con las ecuaciones que determinan la evolución del deterioro del material denominamos al criterio de fallo como acoplado. Para su resolución dentro de un código de elementos finitos se pueden seguir dos aproximaciones. La primera, denominada semiacoplada, consiste en calcular, en cada instante de tiempo, el estado de temperaturas, tensiones y deformaciones de cada elemento manteniendo los valores calculados en el instante de tiempo anterior de las variables que determinan el deterioro del material. Una vez calculado el nuevo estado de temperaturas, tensiones y deformaciones se calculan las variables que determinan el deterioro del material teniendo en cuenta los nuevos valores de las variables mecánicas y térmicas. La segunda aproximación, denominada totalmente acoplada, consiste en resolver simultáneamente las ecuaciones constitutivas que determinan los campos de tensiones, temperaturas y deformaciones y las ecuaciones que determinan la evolución del deterioro del material.

#### 2.4.1. Fallo macroscópico

Desde hace unos años la industria del automóvil y la aeronáutica están mostrando un interés creciente en la comprensión de los fenómenos de fallo dúctil en metales y aleaciones. Por

lo general, el fallo del material es el resultado de un proceso físico complejo que se produce a escala micro-mecánica. A una escala macroscópica las variables que controlan el fallo están determinados por los valores actuales y pasados del tensor de tensiones y tensor de deformación.

Los mecanismos de fallo en los metales tienen su origen a nivel microscópico en la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos. Los metales están constituidos por una matriz formada por una microestructura policristalina en la que los cristales individuales están unidos unos a otros a través de sus bordes. Los granos, desde el punto de vista mecánico tienen propiedades anisótropas. Esta anisotropía también es observable en la microestructura debido a los microdefectos inducidos por el proceso de fabricación o la inclusión de diferentes materiales. La presencia de estos defectos e inclusiones genera dislocaciones en la red cristalina. Al aplicar una tensión de cortadura sobre la estructura cristalina, las dislocaciones se desplazan y el trabajo realizado durante ese desplazamiento se disipa mayoritariamente en forma de calor.

El movimiento de las dislocaciones se ve obstaculizado por los límites de los granos cristalinicos, deteniéndose y empezando a acumularse en dichos límites. Esa acumulación de dislocaciones es observada como un endurecimiento por deformación con regiones en las que se produce una alta concentración de tensiones. La acumulación de dislocaciones no sólo causa concentración de tensiones, es además el origen de la formación de microvacíos. La coalescencia de las dislocaciones conduce a la formación y el crecimiento de los microvacíos los cuales producen un deterioro de las propiedades mecánicas del material conocido habitualmente como daño. La deformación plástica y la tensión hidrostática son las responsables del crecimiento de los microvacíos. Desde el punto de vista de la Mecánica de Daño en Medios Continuos, el daño es una reducción del área resistente en cualquier plano de un Elemento de Volumen Representativo que está gobernado por la energía elástica y la deformación plástica acumulada.

La caracterización del fallo dúctil de los materiales proporciona una información muy valiosa que permite modelar apropiadamente un material y analizar sus condiciones de fallo. Por ello en las últimas décadas se han gestado varios modelos de fallo, basados en la nucleación, crecimiento y coalescencia de huecos. Entre los modelos de fallo usados hoy en día, destaca por su simplicidad el modelo basado en la deformación plástica equivalente que establece que el fallo de un material se produce cuando la deformación plástica equivalente  $(p(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p dt)$  del mismo alcanza un valor límite. Este valor límite es independiente de su evolución previa y del estado tensional. Este modelo es fácil de calibrar al estar determinado por un único parámetro,

## 2. ANTECEDENTES

---

pero en general no es capaz de predecir correctamente el fallo en los casos en los que el campo de tensiones y su evolución no se asemeja al usado para su calibración.

Muchos investigadores han planteado que el estado de tensión y su evolución previa pueden causar cambios significativos en la deformación plástica equivalente de fallo de un material sometido a condiciones de carga complejas. Rice y Tracey (28) demostraron que el crecimiento de un microvacío es muy dependiente de la triaxialidad  $\eta = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$  y la deformación plástica. Esto lo han verificado experimentalmente Borvik (8), (22) y (9), Bao (6) y Wierzbicki (7) entre otros. Por lo tanto, según estos investigadores, un modelo generalizable a cualquier estado de tensiones y sus historias debería incorporar la dependencia con la triaxialidad que ha demostrado ser uno de los factores más importantes en la evolución inelástica de un material dúctil.

Históricamente muchos modelos han considerado que el daño del material es un proceso independiente que no afecta al comportamiento plástico del material. Es decir, las propiedades plásticas del material no cambian a medida que se acumula el daño en el material. En estos modelos se emplea un índice de daño desacoplado del modelo plástico que tiene en cuenta la acumulación del daño del material y que provocará el fallo mecánico del material de forma repentina sin una degradación previa al llegar el daño a un valor crítico. La ventaja de estos modelos es que la evolución del daño y la evolución de la plasticidad están desacoplados en el procedimiento de integración del campo de temperaturas, tensiones y deformaciones. La desventaja es que estos modelos de fallo no son capaces de reproducir la degradación de las propiedades mecánicas del material a medida que se acumula el daño proporcionando por tanto un modelo demasiado simplificado de la respuesta del material antes del fallo del mismo. Por lo tanto estos modelos usualmente no son capaces de predecir correctamente el modo de fallo debido a que no tienen en cuenta el debilitamiento progresivo que induce el daño en las últimas etapas de la deformación.

No obstante estos criterios de fallo, debido a su facilidad de implementación en los códigos de elementos finitos y a su eficiencia computacional, son ampliamente utilizados en ingeniería proporcionando resultados cualitativos valiosos. Entre estos criterios de fallo destacan los siguientes:

- fallo por deformación plástica equivalente constante,
- fallo por máxima tensión de cortadura,
- modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh,

- modelo de fallo de Wilkins,
- modelo de fallo de Johnson - Cook y
- modelo de fallo de Xue - Wierzbicki

Todos estos criterios de fallo se pueden encuadrar dentro los denominados métodos desacoplados en los que la evolución del indicador que mide el daño del material no está acoplado con las ecuaciones constitutivas que establecen la evolución del resto de variables mecánicas. De esta manera, se pueden resolver las ecuaciones constitutivas del material y en un cálculo posterior se calcula el indicador que mide el daño del material.

Más recientemente han aparecido modelos en los que el daño se acopla con la plasticidad de manera que ambos fenómenos evolucionan de una manera dependiente siendo capaces de tener en cuenta la degradación de las propiedades mecánicas del material en las últimas fases de la deformación antes de producirse el fallo. En este sentido habría que destacar las dos aproximaciones mencionadas anteriormente, la primera es denominada como modelo constitutivo micromecánico basada en el modelo propuesto por Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) y la segunda aproximación se basa en modelos constitutivos fenomenológicos que se encuadran dentro de la teoría de la Mecánica del Daño Continuo.

### 2.4.2. Criterios de Fallo y Plastificación y su relación con el endurecimiento cinemático

Antes de pasar a describir los diferentes criterios de fallo enumerados anteriormente analizaremos como puede afectar la introducción del endurecimiento cinemático en los mismos ya que habitualmente este endurecimiento no es tenido en cuenta en las expresiones que los definen. Como se describe en el Anexo E Superficie de Plastificación tipo  $J_2$  tanto la superficie de plastificación sin endurecimiento cinemático como con él, están representadas en el espacio de las tensiones principales por sendos cilindros circulares cuyo eje es perpendicular al plano  $\pi$  o *plano desviador*. En el caso de no considerar el endurecimiento cinemático el corte del cilindro con el plano  $\pi$  es un círculo con centro en el origen de coordenadas del espacio de las tensiones principales. En el caso de incluir en el modelo constitutivo el endurecimiento cinemático el corte del cilindro con el plano  $\pi$  es un círculo con centro en el punto  $(\sigma_{b_{D_1}}^R, \sigma_{b_{D_2}}^R, \sigma_{b_{D_3}}^R)$  del espacio de tensiones.



## 2. ANTECEDENTES

---

Los materiales dúctiles se caracterizan por ser capaces de soportar deformaciones plásticas considerables antes de llegar al fallo, es decir, el fallo del material se produce en algún punto de la superficie de plastificación, asumiendo que se cumple la condición de consistencia. Como se verá a continuación muchos de los criterios de fallo que se describirán a continuación están relacionados con el estado tensional y no consideran el posible efecto que tiene el endurecimiento cinemático pudiéndose dar el caso de llegar al fallo en estados de carga en los que, por el efecto del endurecimiento cinemático, el estado tensional todavía no ha alcanzado la superficie de plastificación y la deformación es todavía lineal.

Para evitar esta situación, y en los casos en que pueda aplicarse, las expresiones que a continuación se describen para evaluar el índice de deterioro del material serán modificadas para tener en cuenta el desplazamiento de la superficie de plastificación por efecto del endurecimiento cinemático. A continuación se describen someramente los criterios de fallo, que junto con el modelo de daño isótropo descrito en el Capítulo 3 Modelo Constitutivo, serán calibrados y comparados posteriormente. Primero describiremos como evalúan el índice de deterioro del material sin considerar el endurecimiento cinemático y a continuación se presentará una expresión equivalente que incluya el efecto del endurecimiento cinemático y permita asegurar que el índice de deterioro es creciente solo mientras el estado tensional se encuentra sobre la superficie de plastificación manteniéndose sin variación mientras la deformación es sólo elástica y/o térmica.

### 2.4.3. Criterio I: Deformación plástica equivalente constante

El origen de este criterio se remonta a principios del siglo XX, pero por su simplicidad ha sido incorporado en casi todos los códigos comerciales no lineales en el siglo XXI. Este criterio de fallo es válido para todos los posibles estados de tensión. Es uno de los criterios de fallo más simple y utilizado por muchos investigadores. Según este criterio, el fallo o erosión de un elemento del material se produce cuando la deformación plástica equivalente  $\epsilon_{eq}$  alcanza un valor crítico  $\epsilon_f$ . Para un material incompresible, la deformación plástica equivalente se define por:

$$\epsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon^p : \epsilon^p)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\epsilon_1^{p2} + \epsilon_2^{p2} + \epsilon_3^{p2})} \quad (2.6)$$

donde  $\epsilon_1^p$ ,  $\epsilon_2^p$  y  $\epsilon_3^p$  son las componentes principales del tensor de deformación plástica  $\epsilon^p$ .

Cuando el estado de carga es complejo y el tensor de deformación plástica varía sensiblemente a lo largo del tiempo, es mas conveniente utilizar la acumulación de la deformación plástica equivalente de manera que el criterio de fallo tiene en cuenta la historia de la deformación plástica

y no solo el estado actual de la misma. Según este criterio, el fallo o erosión de un elemento del material se produce cuando la deformación plástica equivalente acumulada  $p$  alcanza un valor crítico  $p_f$ . La deformación plástica equivalente acumulada de fractura se define como:

$$p_f = \int_0^{t_f} \dot{p} dt = \int_0^{t_f} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P} dt \quad (2.7)$$

donde  $t_f$  es el instante de tiempo en el que se alcanza el valor crítico de deformación plástica equivalente acumulada  $p_f$ .

Este modelo es fácil de calibrar al estar determinado por un único parámetro  $p_f$ , pero en general no es capaz de predecir correctamente el fallo en las aplicaciones en las que el campo de tensiones y su evolución no se asemeja al usado para su calibración.

#### 2.4.4. Criterio II: Máxima tensión de cortadura

Hay múltiples evidencias de la aparición de fallo dúctil en un plano donde la tensión de cortadura alcanza un máximo. En los ensayos de compresión de cilindros metálicos aparece un fallo en espiral en la zona ecuatorial de la probeta al adoptar una forma de barril. Es entonces razonable considerar que el fallo puede estar dominado por la máxima tensión de cortadura que puede aguantar un material. Siguiendo la idea establecida por el criterio de Tresca en relación a la plastificación bajo carga multiaxial, el criterio de fallo por máxima tensión de cortadura establece que el fallo del material se inicia y crece en un cuerpo cuando la tensión de cortadura de un punto del material alcanza un valor crítico.

El criterio de fallo por máxima tensión de cortadura se utiliza con frecuencia, especialmente para materiales frágiles que fallan con poca deformación plástica. En los impactos a alta velocidad, las tensiones de cortadura son las principales responsables de la formación y el crecimiento de grietas a lo largo del espesor de la placa impactada. Por ello es interesante investigar la aplicabilidad de este criterio de fallo a los problemas de impacto y su posible traslación a otro tipo de problemas. La condición de fallo en carga multiaxial según este criterio establece que el fallo se producirá cuando la tensión máxima de cortadura  $\tau_{max}$  alcance un valor límite  $\tau_f$  donde  $\tau_{max}$  está definida por:

$$\tau_{max} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2}\right) \quad (2.8)$$

donde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son las tensiones principales del tensor de tensiones. La ecuación 2.8 es igual que la establecida por el criterio de Tresca, con la diferencia de que el valor de  $\tau_f$  es mayor

## 2. ANTECEDENTES

que la tensión de plastificación en cortadura. A semejanza del criterio de plastificación de Tresca, la superficie definida por 2.8 es un cilindro hexagonal cuya directriz es perpendicular al plano  $\pi$  o *plano desviador* y centrado en el origen del espacio de las tensiones.

Como se puede comprobar en la ecuación 2.8 no se tiene en cuenta el historial de cargas a las que se ha visto sometido el material. En particular no se tiene en cuenta las posibles cargas cíclicas u otras condiciones de carga en las que el endurecimiento cinemático pueda tener una importancia relevante. Teniendo en cuenta lo expuesto en 2.4.2 Criterios de Fallo y Plastificación y su relación con el endurecimiento cinemático y dado que los materiales dúctiles experimentan el fallo una vez que han sobrepasado las condiciones de deformación elástica y, para modelos constitutivos termoviscoplasticos de tipo  $J_2$  que incluyan el endurecimiento cinemático, éstas están condicionadas al cumplimiento de la condición  $f = (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq} - R(p, \dot{p}, T, \dots) = 0$  es necesario modificar la ecuación 2.8 de la siguiente manera:

$$\tau_{max} = \max\left(\frac{|(\sigma - \sigma_b)_1 - (\sigma - \sigma_b)_2|}{2}, \frac{|(\sigma - \sigma_b)_2 - (\sigma - \sigma_b)_3|}{2}, \frac{|(\sigma - \sigma_b)_3 - (\sigma - \sigma_b)_1|}{2}\right) \quad (2.9)$$

donde  $(\sigma - \sigma_b)_1$ ,  $(\sigma - \sigma_b)_2$  y  $(\sigma - \sigma_b)_3$  son las componentes principales del tensor  $(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)$ . De esta manera nos aseguramos que el fallo se alcanza sobre la superficies de plastificación cuando, por efecto del endurecimiento isótropo, el radio del cilindro circular que constituye la superficie de plastificación corta el cilindro hexagonal que constituye el criterio de fallo de máxima tensión de cortadura.

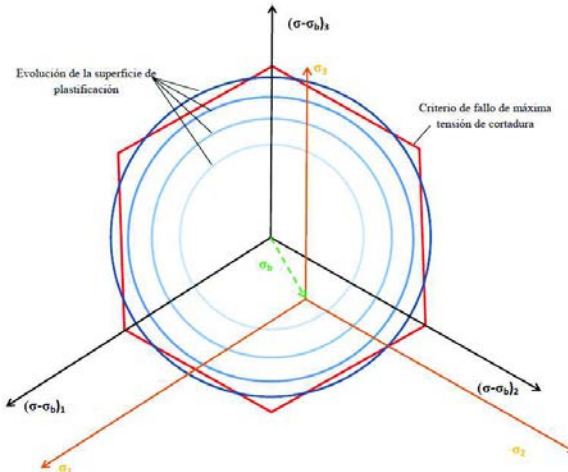


Figura 2.1: Superficie de fallo definida por el Criterio de Máxima Tensión de Cortadura y evolución de la superficie de plastificación debida al endurecimiento isótropo según el criterio de plastificación de tipo  $J_2$  representado en el espacio de las tensiones principales de  $\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b$

### 2.4.5. Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh

La evolución del deterioro de un material está fuertemente influenciado por su estado tensional. Muchos estudios sugieren que el fallo de materiales metálicos está asociado a la tensión de tracción, incluso en procesos de fabricación como el forjado en el que predomina la compresión. La importancia de la tensión de tracción se ha confirmado de manera indirecta al observar un aumento considerable de la ductilidad de los materiales al deformarse en condiciones de una elevada presión hidrostática. Pugh y Green (44) demostraron que superponiendo una presión hidrostática en el proceso de extrusión incluso materiales frágiles podían ser extruidos sin dificultad.

Cockcroft y Latham (14) establecieron que plantear un criterio de fallo basado en la densidad de energía plástica que considerase únicamente la tensión equivalente, es decir la tensión de plastificación de cada momento, no proporciona la solución adecuada. La tensión de plastificación en cada momento, a diferencia de la tensión máxima no está influenciada por la forma de la zona de estricción y en consecuencia la forma de dicha zona no debe tener efecto sobre la deformación en el momento del fallo lo cual está en contra de lo observado en los ensayos. Por lo tanto Cockcroft y Latham proponen un criterio basado en la densidad de energía de deformación por tensión. Este criterio establece que el fallo está controlado por la siguiente expresión:

$$D_{CL} = \int_0^{\epsilon_f} \langle \sigma_1 \rangle d\epsilon^p \quad (2.10)$$

donde  $\langle \sigma_1 \rangle$  toma el valor de  $\sigma_1$  si  $\sigma_1 > 0$  y toma el valor 0 si  $\sigma_1 < 0$  siendo  $\sigma_1$  la componente principal mayor del tensor de tensiones ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ). Derivados del criterio de fallo de Cockcroft y Latham otros autores han introducido modificaciones como, Brozzo (12), Oh(39), Oyane-Sato (41), Clift(13) y Ko-Huh (30) entre otros. Oh et al. (39) modificó el criterio de fallo de Cockcroft y Latham normalizando la máxima tensión principal con la tensión equivalente. En esta tesis evaluaremos el modelo de Cockcroft y Latham modificado por Oh. En la tabla 2.1 pueden encontrarse las expresiones de criterios de fallo propuestas por diversos autores derivadas del criterio propuesto por Cockcroft y Latham.

Al igual que en los criterios anteriores, en las expresiones presentadas en la tabla 2.1 no se tiene en cuenta el endurecimiento cinemático y por tanto es necesario modificar dichas expresiones con el objeto de considerar el endurecimiento cinemático tal y como se muestra en la tabla 2.2.

## 2. ANTECEDENTES

---

Autor	Expresión
Cockcroft-Latham	$\int_0^{\epsilon_f} \langle \sigma_1 \rangle d\epsilon^p = D_{CL}$
Brozzo	$\int_0^{\epsilon_f} \frac{2\langle \sigma_1 \rangle}{3(\langle \sigma_1 \rangle - \sigma_H)} d\epsilon^p = D_{Bz}$
Oh	$\int_0^{\epsilon_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\sigma_{eq}} d\epsilon^p = D_{Oh}$
Oyane-Sato	$\int_0^{\epsilon_f} \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} + C_{OS} \right) d\epsilon^p = D_{OS}$
Clift	$\int_0^{\epsilon_f} \sigma_{eq} d\epsilon^p = D_{Cl}$
Ko-Huh	$\int_0^{\epsilon_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\sigma_{eq}} \left( 1 + 3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right) d\epsilon^p = D_{KH}$

Tabla 2.1: Modelos de fallo basados en el propuesto por Cockcroft y Latham

Autor	Expresión
Cockcroft-Latham	$\int_0^{\epsilon_f} \langle (\sigma - \sigma_b)_1 \rangle d\epsilon^p = D_{CL}$
Brozzo	$\int_0^{\epsilon_f} \frac{2\langle (\sigma - \sigma_b)_1 \rangle}{3(\langle (\sigma - \sigma_b)_1 \rangle - \sigma_H)} d\epsilon^p = D_{Bz}$
Oh	$\int_0^{\epsilon_f} \frac{\langle (\sigma - \sigma_b)_1 \rangle}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}} d\epsilon^p = D_{Oh}$
Oyane-Sato	$\int_0^{\epsilon_f} \left( \frac{\sigma_H}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}} + C_{OS} \right) d\epsilon^p = D_{OS}$
Clift	$\int_0^{\epsilon_f} (\sigma - \sigma_b)_{eq} d\epsilon^p = D_{Cl}$
Ko-Huh	$\int_0^{\epsilon_f} \frac{\langle (\sigma - \sigma_b)_1 \rangle}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}} \left( 1 + 3 \frac{\sigma_H}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}} \right) d\epsilon^p = D_{KH}$

Tabla 2.2: Modelos de fallo basados en el propuesto por Cockcroft y Latham corregidos con el endurecimiento cinemático

#### 2.4.6. Criterio IV: Modelo de fallo de Wilkins

Uno de los primeros modelos de nucleación de microvacíos es el propuesto por Argon (3). Este modelo postula que la tensión de decohesión  $\sigma_c$  es una combinación de la tensión hidrostática  $\sigma_H$  y la tensión equivalente de von Mises  $\sigma_{eq}$ :

$$\sigma_c = \sigma_H + \sigma_{eq} \quad (2.11)$$

Wilkins, siguiendo una aproximación similar, propuso un criterio de fallo basado en la acumulación o integral de la plasticidad. En este caso la acumulación de la plasticidad está ponderada a través de dos factores  $w_1$  y  $w_2$ . Estos dos factores tienen la finalidad de introducir de manera independiente el efecto de la tensión hidrostática y las componentes de tensor de tensiones desviador. Este criterio define un índice de deterioro o “daño”  $D$  dado por:

$$D_c = \int_0^{p_f} w_1 w_2 dp \quad (2.12)$$

Donde:

$$w_1 = \left(1 + \frac{\sigma_H}{\sigma_{WK}}\right)^{-a_{WK}} \quad (2.13)$$

corresponde al factor de ponderación de la tensión hidrostática que es la principal causante del crecimiento de los microvacíos y

$$w_2 = (2 - A_{WK})^{b_{WK}} \quad (2.14)$$

corresponde al factor de ponderación de la tensión desviadora. Este factor tiene en cuenta que la deformación de fallo decrece cuando el estado de tensiones es asimétrico. En la expresión 2.14 se define  $A_{WK}$  como:

$$A_{WK} = \text{Max}\left(\frac{s_2}{s_3}, \frac{s_2}{s_1}\right), \quad s_1 \geq s_2 \geq s_3 \quad (2.15)$$

Siendo  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  las componentes principales del tensor de tensiones desviador.

Como se puede comprobar en la ecuación 2.12 no se tiene en cuenta las posibles cargas cíclicas u otras condiciones de carga en las que el endurecimiento cinemático pueda tener una importancia relevante. Teniendo en cuenta lo expuesto en 2.4.2 Criterios de Fallo y Plastificación y su relación con el endurecimiento cinemático y por las mismas razones que las expuestas en 2.4.4 Criterio II: Máxima tensión de cortadura es necesario modificar la expresión de 2.15 de la siguiente manera:

$$A_{WK} = \text{Max}\left(\frac{(\sigma - \sigma_b)_2^D}{(\sigma - \sigma_b)_3^D}, \frac{(\sigma - \sigma_b)_2^D}{(\sigma - \sigma_b)_1^D}\right), \quad (\sigma - \sigma_b)_1^D \geq (\sigma - \sigma_b)_2^D \geq (\sigma - \sigma_b)_3^D \quad (2.16)$$

## 2. ANTECEDENTES

---

Donde  $(\sigma - \sigma_b)_1$ ,  $(\sigma - \sigma_b)_2$  y  $(\sigma - \sigma_b)_3$  son las componentes principales del tensor  $(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)$ . De esta manera el término  $w_2$ , que considera el efecto de un estado de tensiones asimétrico, es corregido al introducir el desplazamiento de la superficie de plastificación debido al endurecimiento cinemático. Por otro lado, dado que  $\bar{\sigma}_b$  es un tensor desviador se tiene que  $\sigma_H = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{(\sigma - \sigma_b)_{ii}}{3}$  y por tanto no es necesario modificar la expresión de 2.13 por el efecto del endurecimiento cinemático.

Este modelo está caracterizado por cuatro parámetros  $\sigma_{WK}$ ,  $a_{WK}$ ,  $b_{WK}$  y  $D_c$ , siendo  $p_f$  la deformación plástica equivalente acumulada hasta el momento en el que se alcanza el valor  $D_c$ .

### 2.4.7. Criterio V: Modelo de fallo de Johnson - Cook

Como se comentó anteriormente, los mecanismos de fallo en los metales tiene su origen a nivel microscópico en la nucleación, crecimiento y coalescencia de microvacíos. Entre los primeros trabajos que han estudiado el fallo dúctil basándose en el estudio del crecimiento de los microvacíos se encuentran los realizados por McClintock (20) y Rice y Tracey (28). Ambos trabajos se basan en los resultados de los experimentos llevados a cabo por Bridgman (11). Bridgman encontró que un efecto importante de la presión hidrostática es el aumentó de la ductilidad, es decir que la deformación antes de la rotura se incrementaba considerablemente cuando se aplica una presión hidrostática como condición de contorno en ensayos de tracción. Además, Bridgman encontró que el volumen de material no cambia en la sección de control para cambios muy grandes de deformación plástica. Estas observaciones experimentales en los metales llevaron a establecer dos de los principios básicos de la plasticidad de los metales, la no influencia de la presión hidrostática en la plastificación y la incompresibilidad de deformación plástica.

McClintock (20) propone un índice de daño que se acumula hasta alcanzar la unidad en el momento del fallo. A partir de la ecuación de equilibrio  $\nabla \bar{\sigma} = 0$  y suponiendo deformación plana e incompresible, McClintock deduce una expresión para la deformación de fractura para un microvacío cilíndrico de sección elíptica. El trabajo de Rice y Tracey (28) establece que la fractura por colaescencia de microvacios se ve acelerada por la triaxialidad. Por su lado Hancock y Mackenzie (18) demostraron que la coalescencia de los vacíos no tiene una dirección preferida, lo que les permitió generalizar la expresión deducida por McClintock para la deformación de fractura de la siguiente manera:

$$\epsilon^f = D_1 + D_2 e^{(D_3 \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}})} \quad (2.17)$$

Donde  $D_1$  es la deformación de nucleación de microvacíos.

Basándose en los trabajos antes citados, Johnson y Cook (26) completaron su modelo de plastificación con un modelo de fallo basado en un modelo acumulativo del deterioro del material. Este modelo de fallo tiene una forma similar al modelo de plastificación con tres términos combinados de forma multiplicativa y desacoplada para incluir los efectos de la triaxialidad, la velocidad de deformación y la temperatura según se indica en 2.18 y 2.19.

$$D = \int_0^{p_f} \frac{dp}{p(t)} \quad (2.18)$$

$$p(t) = (Fr_{1JC} + Fr_{2JC} e^{\frac{Fr_{3JC} \sigma_H}{\sigma_{eq}}}) (1 + Fr_{4JC} \ln(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0})) (1 + Fr_{5JC} \frac{T - T_0}{T_m - T_0}) \quad (2.19)$$

Donde  $D$  es una medida del deterioro o índice de daño del material,  $p_f$  es la deformación plástica equivalente acumulada en el momento del fallo y  $p(t)$  es la deformación plástica equivalente acumulada de fallo en las condiciones actuales de triaxialidad, velocidad de deformación y temperatura.

Como se puede comprobar en las ecuaciones 2.18 y 2.19 no se tiene en cuenta el endurecimiento cinemático. De manera similar a lo indicado en 2.4.4y 2.4.6 se modifica la expresión de 2.19 con el objeto de considerar el endurecimiento cinemático:

$$p(t) = (Fr_{1JC} + Fr_{2JC} e^{\frac{Fr_{3JC} \sigma_H}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}}}) (1 + Fr_{4JC} \ln(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0})) (1 + Fr_{5JC} \frac{T - T_0}{T_m - T_0}) \quad (2.20)$$

La calibración de este modelo de fallo requiere de cinco parámetros  $Fr_{1JC}$  a  $Fr_{5JC}$ . En el modelo de fallo original de Johnson y Cook el fallo del material se produce cuando  $D$  llega a valer 1.

#### 2.4.8. Criterio VI: Modelo de fallo de Xue - Wierzbicki

Una revisión de los datos experimentales relacionados con el fallo indican que:

- La superposición de una presión hidrostática aumenta la ductilidad de los materiales.
- La deformación plana dúctil suele ser mayor que la ductilidad en casos de triaxialidad de tensión o compresión elevada manteniendo la presión constante.



## 2. ANTECEDENTES

---

- El daño se acumula de una manera no lineal, acelerando su progreso en las etapas previas al fallo.
- El daño que se produce a nivel microscópico afecta a la resistencia del material en su respuesta mecánica a nivel macroscópico.

Por lo tanto, el fallo en los materiales dúctiles es el resultado último de la acumulación del daño debido a la deformación plástica. Basándose en las anteriores observaciones Xue y Wierzbicki (55) proponen un nuevo modelo de fallo que incluye los efectos de la presión hidrostática, la dependencia del parametro de Lode, una ley de evolución de daño no lineal y el efecto del deterioro del material. El nuevo modelo considera que el fallo ocurre cuando la deformación plástica equivalente acumulada, modificada por una función de la triaxialidad  $\eta$  y del parámetro  $\xi$  alcanza el valor de uno.

$$D = \int_0^{p_f} \frac{dp}{F_{XW}(\eta, \xi)} \quad (2.21)$$

Donde  $\eta = \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$  y  $\xi = \frac{27}{2} \frac{s_1 s_2 s_3}{\sigma_{eq}^3}$ , siendo  $s_1, s_2, s_3$  las componentes principales del tensor de tensiones desviador.

Para determinar  $F_{XW}(\eta, \xi)$  seguiremos lo propuesto por Wierzbicki y Bao (56) de manera que su la expresión final queda:

$$F_{XW}(\eta, \xi) = C_1 e^{-C_2 \eta} - (C_1 e^{-C_2 \eta} - C_3 e^{-C_4 \eta})(1 - \xi^{m_{XW}}) \frac{1}{m_{XW}} \quad (2.22)$$

en donde  $C_1$  a  $C_4$  son cuatro parámetros característicos del material y  $m_{XW}$  es un número par relacionado con el parámetro de endurecimiento  $n_{JC}$  de la ecuación de Johnson-Cook de manera que  $m_{XW}$  es el número par más próximo a  $\frac{1}{n_{JC}}$ .

Igual que en los criterios de fallo descritos anteriormente, es necesario modificar la expresión 2.22 para considerar el efecto del endurecimiento cinemático quedando de la siguiente manera:

$$F_{XW}(\eta_b, \xi_b) = C_1 e^{-C_2 \eta_b} - (C_1 e^{-C_2 \eta_b} - C_3 e^{-C_4 \eta_b})(1 - \xi_b^{m_{XW}}) \frac{1}{m_{XW}} \quad (2.23)$$

Donde  $\eta_b = \frac{\sigma_H}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}}$  y  $\xi_b = \frac{27}{2} \frac{(\sigma^D - \sigma_b)_1 (\sigma^D - \sigma_b)_2 (\sigma^D - \sigma_b)_3}{(\sigma - \sigma_b)_{eq}^3}$ , siendo  $(\sigma^D - \sigma_b)_1, (\sigma^D - \sigma_b)_2, (\sigma^D - \sigma_b)_3$  las componentes principales del tensor desviador  $(\bar{\sigma}^D - \bar{\sigma}_b)$ .

### 2.4.9. Criterio VII: Modelo de fallo por Daño

Como se comentó anteriormente, han aparecido modelos de fallo en los que el deterioro del material o daño se acopla con la plasticidad de manera que ambos fenómenos evolucionan de una manera dependiente siendo capaces de tener en cuenta la degradación de las propiedades mecánicas del material en las últimas fases de la deformación antes de producirse el fallo.

Todos los ensayos y medidas de plasticidad y fatiga muestran que no se produce un deterioro en las propiedades mecánicas del material hasta que se alcanza un cierto valor de deformación plástica equivalente acumulada ( $p_D$ ). Este umbral de deformación plástica depende del material pero también se ha encontrado que tiene una fuerte dependencia con el tipo de carga a la que se somete el material. Esto es debido a que el inicio del daño está relacionado con la energía necesaria para la incubación de los defectos. Hasta que el material no ha acumulado ese umbral de energía necesario para el inicio de los microvacíos y microfracturas, estas no aparecen y por tanto el material no sufre daño mecánico.

También puede observarse en los ensayos de tracción que existe una tensión máxima que puede soportar el material, una vez alcanzada esa tensión máxima, el material tiene un comportamiento inestable incrementándose la deformación a la vez que disminuye la tensión terminando por producirse la fractura. En estas condiciones de carga, el comportamiento del material está dominado por el daño.

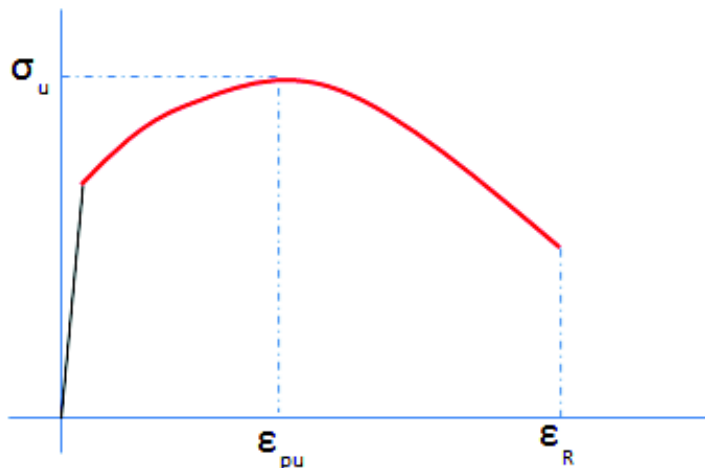


Figura 2.2: Ensayo de tracción hasta rotura en un test uniaxial

## 2. ANTECEDENTES

---

Por otro lado, tras la incubación y crecimiento de los microdefectos, se ha comprobado que cuando se alcanza una cierta densidad de defectos se desarrolla una inestabilidad en el proceso de carga que desencadena el fallo del material. Esta densidad de defectos definen un daño crítico ( $D_c$ ) característico de cada material.

El daño, desde el punto de vista de los materiales sólidos lo constituye la creación y crecimiento de microvacíos y microfisuras. Estos microvacíos constituyen discontinuidades en un medio que a una escala mayor es considerado un medio continuo. La mecánica de medios continuos considera que las propiedades de un material están representadas por variables homogéneas válidas en lo que se denomina un Volumen Representativo Elemental (Representative Volume Elementary “RVE”). Este volumen puede variar varios ordenes de magnitud dependiendo del material, siendo del orden de  $0,1mm^3$  para metales y cerámicas y  $100mm^3$  para cementos y hormigones. Las discontinuidades relacionadas con el daño son pequeñas en relación al RVE pero muy grandes en relación con la estructura atómica.

En general el daño es una variable asociada al material que no es isotrópica, debido a que sus efectos y evolución son más apreciables cuando la carga se aplica en la dirección perpendicular a las microfisuras. La forma más general de considerar el daño sería por medio de una variable representada por un tensor de cuarto orden. Este tipo de tensores son difíciles de usar y en mecánica de medios continuos aplicada a la ingeniería es suficiente representar el daño por un tensor de segundo orden e incluso considerar el daño como isotrópico.

Una vez que aparece el daño se aprecia experimentalmente que existe un acoplamiento de este con el comportamiento mecánico del material. Este acoplamiento fue formulado por J. Lemaitre en 1971 introduciendo el concepto de tensión efectiva  $\tilde{\sigma}$  asociado con el ***principio de equivalencia de deformación***. Este principio establece que las ecuaciones constitutivas de deformación de un material dañado se pueden deducir de las correspondientes al mismo material no dañado con la excepción de sustituir la tensión por la tensión efectiva.

### 2.4.9.1. Tensión Efectiva

Como se comentó anteriormente, una representación precisa del daño debería hacerse por medio de un tensor de cuarto orden. No obstante es posible determinar una representación del daño mediante un tensor de segundo orden tal y como lo plantea J. Lemaitre y R. Desmorat en (32) que cumpla las siguientes condiciones:

- El tensor de tensión efectiva resultante debe ser simétrico (observar que  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ik}(\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{D}})_{kj}^{-1}$  no es simétrico).
- El tensor de tensión efectiva debe ser independiente del comportamiento de la deformación y en particular del coeficiente de Poisson (observar que  $\tilde{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\tilde{E}_{klrs}\sigma_{rs}$  puede depender del coeficiente de Poisson).
- Compatibilidad con el marco termodinámico, es decir la existencia de un potencial de deformación y compatibilidad con el **principio de equivalencia de deformación**. Estableciendo la simetría  $\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2}[\sigma_{ik}(\mathbf{1} - \mathbf{D})_{kj}^{-1} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})_{ik}^{-1}\sigma_{kj}]$  no permite derivar de un potencial.
- El tensor de tensión efectiva debe tener en cuenta el efecto diferente que produce el daño sobre el comportamiento de la tensión hidrostática ( $\sigma_H$ ) y sobre el comportamiento de la parte desviadora ( $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^D$ ). Esto se hará introduciendo un parámetro de sensibilidad hidrostática ( $\eta_D$ ).

Teniendo en cuenta estas restricciones J. Lemaitre y R. Desmorat establecen las siguientes relaciones de transformación entre el tensor de tensiones de Cauchy y la tensión efectiva.

$$\bar{\mathbf{H}} = (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{D}}) \frac{-1}{2} \quad (2.24)$$

$$\sigma_H = \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (2.25)$$

$$D_H = \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{D}}) \quad (2.26)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{H}} \otimes \bar{\mathbf{H}} - \frac{1}{3} [\bar{\mathbf{H}}^2 \otimes \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{H}}^2] + \frac{1}{9} \text{traza}(\bar{\mathbf{H}}^2) \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} + \frac{1}{3(1 - \eta_D D_H)} \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} \quad (2.27)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{M}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\bar{\mathbf{H}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^D \bar{\mathbf{H}})^D + \frac{\sigma_H}{1 - \eta_D D_H} \bar{\mathbf{I}} \quad (2.28)$$

En donde  $\bar{\mathbf{H}}$  es un tensor de segundo orden que representa el daño efectivo y  $\bar{\mathbf{M}}$  es un tensor simétrico de cuarto orden.

## 2. ANTECEDENTES

---

Recíprocamente, para convertir la tensión efectiva en la tensión de Cauchy podemos usar las siguientes relaciones:

$$\bar{\underline{M}}^{-1} = \bar{\underline{H}}^{-1} \underline{\otimes} \bar{\underline{H}}^{-1} - \frac{(\bar{\underline{1}} - \bar{\underline{D}}) \otimes (\bar{\underline{1}} - \bar{\underline{D}})}{3(1 - D_H)} + \frac{1}{3}(1 - \eta_D D_H) \bar{\underline{1}} \otimes \bar{\underline{1}} \quad (2.29)$$

$$\bar{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{M}}^{-1} : \tilde{\underline{\sigma}} = \bar{\underline{H}}^{-1} \tilde{\underline{\sigma}} \bar{\underline{H}}^{-1} - \frac{(\bar{\underline{1}} - \bar{\underline{D}}) : \tilde{\underline{\sigma}}}{3(1 - D_H)} (\bar{\underline{1}} - \bar{\underline{D}}) + (1 - \eta_D D_H) \tilde{\underline{\sigma}}_H \bar{\underline{1}} \quad (2.30)$$

En el caso de un modelo de daño isótropo, estas relaciones se reducen a:

$$\bar{\underline{D}} = D \bar{\underline{1}} \quad (2.31)$$

$$\bar{\underline{H}} = \frac{\bar{\underline{1}}}{\sqrt{1 - D}} \quad (2.32)$$

$$\bar{\underline{M}} = \frac{\bar{\underline{1}} \underline{\otimes} \bar{\underline{1}}}{1 - D} = \bar{\underline{I}} \frac{1}{1 - D} \quad (2.33)$$

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \frac{1}{1 - D} \bar{\underline{\sigma}} \quad (2.34)$$

En las que  $\eta_D = \frac{1}{3}$  y  $D_H = 3D$ .

### 2.4.9.2. Evolución del Daño Anisótropo

Como se mostrará en el capítulo 3 Modelo Constitutivo en el apartado 3.4.3.3 es posible determinar la ley de evolución del daño anisótropo a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{\bar{\underline{D}}} = \left( \frac{Y(\bar{\underline{\epsilon}}^e)}{S} \right)^{\beta_D} |\dot{\bar{\underline{\epsilon}}}^p| \quad (2.35)$$

$$Y(\bar{\underline{\epsilon}}^e) = (\tilde{\underline{\sigma}} : \bar{\underline{\epsilon}}^e) = \frac{\tilde{\underline{\sigma}}_{eq}^2}{E} \left( \frac{2(1 + \nu)}{3} + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\tilde{\underline{\sigma}}_H}{\tilde{\underline{\sigma}}_{eq}} \right)^2 \right) \quad (2.36)$$

y por tanto el daño anisótropo vendrá dado por:

$$\bar{\underline{D}} = \int_{p_D}^{p_f} \left( \frac{Y(\bar{\underline{\epsilon}}^e)}{S} \right)^{\beta_D} |d\bar{\underline{\epsilon}}^p| \quad hasta \quad \|\bar{\underline{D}}\| = D_c \quad (2.37)$$

donde  $(p_f)$  es la deformación plástica equivalente acumulada en el momento en que  $\|\bar{\underline{D}}\| = D_c$ .

### 2.4.9.3. Evolución del Daño Isótropo

De manera similar la ley de evolución del daño isótropo se determinará a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{\bar{D}} = \left( \frac{Y(\bar{\epsilon}^e)}{S} \right)^{\beta_D} \dot{p} \quad (2.38)$$

y por tanto el daño isótropo vendrá dado por:

$$\bar{D} = \int_{p_D}^{p_f} \left( \frac{Y(\bar{\epsilon}^e)}{S} \right)^{\beta_D} \bar{1} dp \quad hasta \quad \bar{D} = D_c \quad (2.39)$$

Según las ecuaciones 2.37 y 2.39, la evolución del daño está caracterizada por dos parámetros  $S$  y  $\beta_D$ . No obstante, teniendo en cuenta la existencia de un umbral de deformación plástica acumulada ( $p_D$ ) a partir del que se inicia la incubación de los microdefectos y que el fallo del material se produce al alcanzarse un daño crítico  $\|\bar{D}\| \leq D_c \leq 1$ , este modelo está por tanto caracterizado por cuatro parámetros.

Como muestran J. Lemaitre y R. Desmorat en (32), la resolución del modelo constitutivo de daño requiere unos recursos computacionales elevados, sin embargo, como se mostrará en el capítulo 4 Resolución Numérica el daño isótropo puede integrarse de una manera mucho mas eficiente que la planteada inicialmente por J. Lemaitre y R. Desmorat en (32). Por ello, el modelo que finalmente se implementará en el desarrollo de esta Tesis Doctoral será el correspondiente al daño isótropo.

## **2. ANTECEDENTES**

---

## 3

# Modelo Constitutivo

La gran mayoría de los materiales de origen metálico presentan una curva tensión - deformación con dos zonas claramente diferenciadas. En la primera zona el material presenta una deformación que es proporcional a la carga a la que está siendo sometido. En esta zona las deformaciones son reversibles de manera que al cesar la carga se anula la deformación. En este rango de deformaciones se dice que el material presenta un comportamiento elástico.

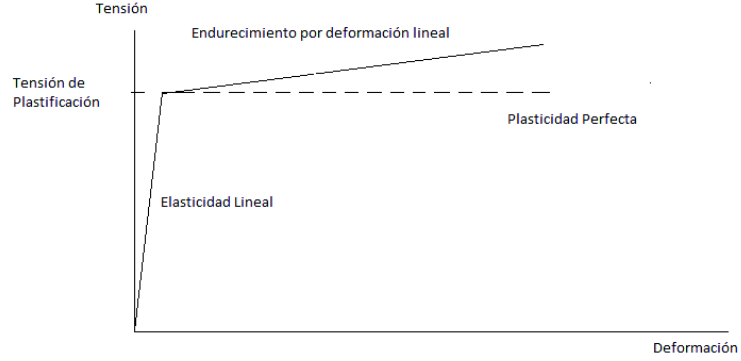
Si la carga a la que se somete el material sobrepasa una determinada magnitud, la deformación deja de ser proporcional a la carga y las deformaciones dejan de ser reversibles de manera que al cesar la carga, el material conserva parte de la deformación a la que fue sometido. En este rango de deformaciones se dice que el material presenta un comportamiento plástico. La tensión a partir de la que se produce este comportamiento se denomina Tensión de Plastificación  $\sigma_y$ .

### 3.1. Función de plastificación J2

Es habitual que al entrar el material en el régimen plástico sea capaz de soportar tensiones superiores a  $\sigma_y$  diciéndose entonces que el material experimenta un endurecimiento plástico al incrementarse la tensión que soporta el material respecto al comportamiento perfectamente plástico. Una vez que el material entra en el régimen plástico, al cesar la carga el material presenta una deformación permanente pero menor que la máxima deformación a la que se sometió el material. La deformación que permanece se denomina deformación plástica  $\epsilon^p$  y la que se recupera al cesar la carga se denomina deformación elástica  $\epsilon^e$ . En la figura 3.1 se puede observar un modelo de este tipo de comportamiento del material.



### 3. MODELO CONSTITUTIVO



**Figura 3.1:** Descomposición clásica de la deformación en parte elástica y plástica

Cuando el estado de tensiones no es uniaxial, uno de los criterios de plastificación más habituales es el propuesto por von Mises, que establece que el material entra en régimen plástico cuando la tensión equivalente  $\sigma_{eq}$  supera la tensión de plastificación  $\sigma_y$ . La tensión equivalente, que es proporcional a la raíz cuadrada del segundo invariante cuadrático del tensor de tensiones denominado  $J_2$ , se define como:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}^D : \bar{\sigma}^D} = \sqrt{3J_2} \quad (3.1)$$

$$\bar{\sigma}^D = \bar{\sigma} - \sigma_H \bar{\mathbf{1}} \quad (3.2)$$

$$\sigma_H = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (3.3)$$

De esta manera se define la función de plastificación de von Mises como:

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}^D : \bar{\sigma}^D} - \sigma_y \quad (3.4)$$

Dependiendo del valor que tome la función de plastificación tenemos:

- si  $f < 0$ , es decir si  $\sigma_{eq} < \sigma_y$  el material presenta un comportamiento elástico
- si  $f \geq 0$ , es decir si  $\sigma_{eq} \geq \sigma_y$  el material presenta un comportamiento plástico

Como se muestra en el Anexo E Superficie de Plastificación tipo  $J_2$  la ecuación 3.4 corresponde a un cilindro en el espacio de las tensiones principales con el eje situado en la línea  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Por lo tanto, según el criterio de plastificación de von Mises la tensión hidrostática no tiene efecto sobre la plastificación del material.

### 3.2. Endurecimiento isótopo y cinemático

Muchos materiales, cuando se deforman plásticamente se endurecen, esto es, la tensión que se requiere para provocar una mayor deformación plástica se incrementa. Este incremento suele ser una función de la deformación plástica acumulada  $p$  que se define como:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\bar{\epsilon}}^p : \dot{\bar{\epsilon}}^p} \quad (3.5)$$

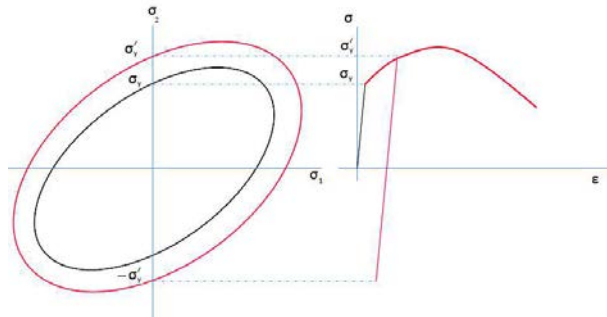
$$p = \int dp = \int \dot{p} dt = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\bar{\epsilon}}^p : \dot{\bar{\epsilon}}^p} dt \quad (3.6)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{d\bar{\epsilon}^p}{dt} \quad (3.7)$$

Siendo  $\bar{\epsilon}^p$  el tensor de deformación plástica. En estos casos la tensión de plastificación deja de ser constante y por tanto la función de plastificación se expresa como:

$$f(p) = \sigma_{eq} - \sigma_y(p) = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}^D : \bar{\sigma}^D} - \sigma_y(p) \quad (3.8)$$

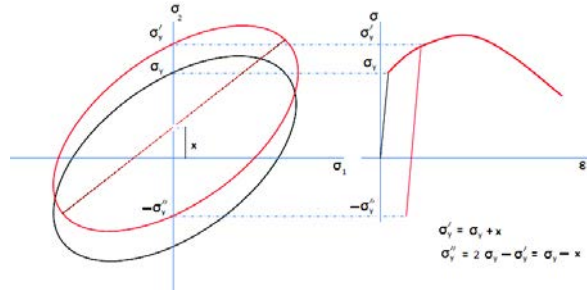
Si el incremento de la tensión es uniforme en todas las direcciones en el espacio de las tensiones, se dice que el material ha experimentado un endurecimiento plástico isótopo como se muestra en la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Evolución de la superficie de plastificación según el criterio de von Mises al experimentar el material un endurecimiento isótopo en condiciones de tensión plana en un test uniaxial

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

Cuando el estado de carga del material es monótonamente creciente o decreciente es razonable asumir que el endurecimiento es isótropo. Sin embargo cuando se invierte la carga o ésta no tiene una tendencia monótona, no es apropiado suponer un endurecimiento totalmente isótropo como lo demuestran los ensayos de carga uniaxial. Se ha comprobado experimentalmente que muchos materiales metálicos experimentan el denominado efecto *Bauschinger* o endurecimiento cinemático que se traduce, en el caso de carga axial, en un comportamiento diferente en tracción que a compresión. En estos ensayos se puede comprobar que tras someter al material a una tensión que sobrepasa su tensión de plastificación, descargarlo posteriormente y finalmente someterlo a una carga de compresión, la tensión de plastificación en compresión es sensiblemente diferente a la tensión de plastificación en tensión como se muestra en la figura 3.3.



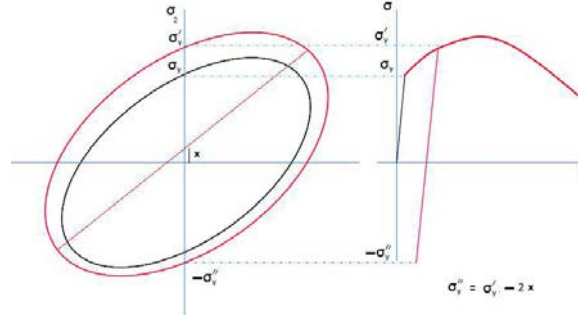
**Figura 3.3:** Evolución de la superficie de plastificación según el criterio de von Mises al experimentar el material un endurecimiento cinemático en condiciones de tensión plana en un test uniaxial

En estos casos la tensión de plastificación se mantiene constante, pero se desplaza el eje del cilindro dejando de apoyarse en la línea  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . En estos casos la función de plastificación se expresa como:

$$f(\bar{\sigma}_b) = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D} - \sigma_y \quad (3.9)$$

En general los materiales experimentan ambos tipos de endurecimiento, expandiéndose el cilindro debido al endurecimiento isótropo y simultáneamente desplazándose el eje del cilindro como consecuencia del endurecimiento cinemático como se muestra en la figura 3.4. En estos casos la función de plastificación se expresa como:

$$f(p, \bar{\sigma}_b) = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D} - \sigma_y(p) \quad (3.10)$$



**Figura 3.4:** Evolución de la superficie de plastificación según el criterio de von Mises al experimentar el material endurecimientos isótropo y cinemático en condiciones de tensión plana en un test uniaxial

### 3.3. Viscoplasticidad

Hasta aquí se ha presentado la relación entre la tensión y la deformación sin tener en cuenta la velocidad a la que se somete el material a la carga. La parte de la mecánica de los medios continuos que describe la deformación plástica de los materiales que son dependientes de la velocidad de las cargas aplicadas y de su historial se denomina viscoplasticidad. Esta dependencia se traduce en general en un incremento de la tensión de plastificación al aumentar la velocidad de aplicación de la carga. Este incremento de tensión de plastificación se suele denominar tensión viscosa  $\sigma_v$  y suele depender de la velocidad de deformación plástica  $\dot{p}$ .

En los materiales viscoplásticos siguen existiendo dos regímenes de deformación, el elástico y el plástico, pero ambos muestran una dependencia con la velocidad de deformación plástica. También sigue siendo válida la existencia de una función de plastificación que determina si el material se encuentra en régimen elástico o plástico. En condiciones en las que los materiales presenta una dependencia con la velocidad de deformación, se siguen observando endurecimiento isótropo y cinemático como se muestra en la figura 3.5. La función de plastificación se expresa como:

$$f_v(p, \bar{\sigma}_b, \dot{p}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D} - \sigma_y(p, \dot{p}) \quad (3.11)$$

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

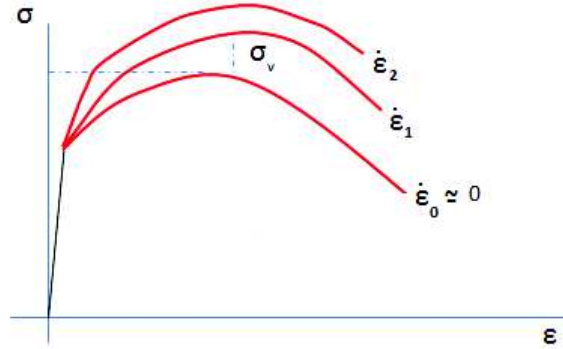


Figura 3.5: Comportamiento viscoplástico de un material junto con un endurecimiento isótropo y cinemático en condiciones de tensión plana en un test uniaxial

#### 3.4. Ecuaciones Constitutivas

Hasta este punto hemos descrito de forma cualitativa la respuesta mecánica de un material al someterle a diversas condiciones de carga. En este apartado plantearemos las ecuaciones que caracterizan la respuesta de un determinado material frente a las cargas exteriores, es decir, de la relación entre tensiones y deformaciones. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones constitutivas pues describen el comportamiento macroscópico resultante de la constitución interna de un material.

Como se ha descrito anteriormente, la respuesta real de los sólidos es extremadamente compleja y variada. No sólo se ve influida por acciones puramente mecánicas, sino también por cambios de temperatura e incluso por la historia del material, es decir por situaciones en las que se ha encontrado con anterioridad. Para simplificar este comportamiento tan complejo del comportamiento de un material frente a todas las acciones posibles se plantearán modelos ideales asociados a los comportamientos y mecanismos de deformación antes mencionados y que reproducirán con suficiente precisión la respuesta del material frente a determinadas cargas. En particular, en esta Tesis Doctoral se ha modelado el comportamiento de un material para poder predecir su respuesta cuando es sometido a las condiciones que se dan en procesos en los que son importantes los efectos asociados a las elevadas velocidades de deformación plástica como pueden ser el impacto a alta velocidad o el mecanizado a alta velocidad de corte.

Las condiciones de carga que se dan en el impacto a alta velocidad o el mecanizado a alta velocidad de corte se caracterizan por la existencia de altas velocidades de deformación. Durante

los procesos dominados por las altas velocidades de deformación el material experimenta habitualmente grandes deformaciones plásticas que conllevan a su vez una gran liberación de energía que se transforma mayoritariamente en calor con el consiguiente calentamiento del material. Es habitual que el incremento de temperatura sea muy significativo en zonas muy localizadas del material, formándose las denominadas bandas adiabáticas de cortadura. En estas zonas la componente térmica de la deformación no será despreciable, más bien al contrario será muy relevante.

En el modelo constitutivo del material considerado en esta Tesis Doctoral asumimos la descomposición aditiva del tensor de deformación que establece que el tensor total de velocidad de deformación ( $\dot{\epsilon}$ ) se descompone en tres componentes, velocidad de deformación elástica ( $\dot{\epsilon}^e$ ), velocidad de deformación plástica ( $\dot{\epsilon}^p$ ) y velocidad de deformación térmica ( $\dot{\epsilon}^T$ ):

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^T \quad (3.12)$$

De las tres componentes de la deformación, solo la plástica tiene un carácter irreversible de manera que esa deformación permanecerá aunque cese la causa que la originó.

#### 3.4.1. Procesos reversibles. Ecuaciones termoelásticas

Para el modelo de comportamiento asociado a la componente térmica de la deformación se ha considerado proporcional al incremento de temperatura ( $\Delta T$ ) desde la temperatura de referencia ( $T_o$ ):

$$\dot{\epsilon}^T = \alpha \Delta T \bar{\mathbf{I}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}^T = \alpha \dot{T} \bar{\mathbf{I}} + \frac{d\alpha}{dT} T \bar{\mathbf{I}} \quad (3.13)$$

Siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación del material. En esta Tesis Doctoral no se ha tenido en cuenta la dependencia de dicho coeficiente de dilatación con la temperatura, considerándose por tanto constante. De esta manera es posible determinar la siguiente expresión para  $\dot{\epsilon}^T$ .

$$\dot{\epsilon}^T = \alpha \dot{T} \bar{\mathbf{I}} \quad (3.14)$$

Para el modelo de comportamiento asociado a la componente elástica de la deformación se ha considerado que la tensión está relacionada con la deformación elástica a través de un tensor de cuarto orden conforme a las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{C} : \tilde{\epsilon}^e \quad (3.15)$$

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

$$\mathbf{C} = 2G\bar{\mathbf{I}} + \lambda\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} = 2G\bar{\mathbf{I}}^D + K\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} \quad (3.16)$$

y recíprocamente

$$\dot{\bar{\epsilon}}^e = \mathbf{c} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\epsilon}}^e = \mathbf{c} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + \dot{\mathbf{c}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{c} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\mathbf{I}} - \frac{\nu}{E}\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}} = \left( \frac{d\left(\frac{1+\nu}{E}\right)}{dT}\bar{\mathbf{I}} - \frac{d\left(\frac{\nu}{E}\right)}{dT}\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} \right) \dot{T} \quad (3.18)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.19)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.20)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (3.21)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $\bar{\mathbf{I}}$  es el tensor unidad de segundo orden y  $\bar{\mathbf{I}}$  es el tensor unidad de cuarto orden. Las ecuaciones 3.15 y 3.17 se han expresado en función de la tensión efectiva teniendo en cuenta el ***principio de equivalencia de deformación***. La relación entre el tensor de tensiones de Cauchy  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  y el tensor de tension efectiva  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  se detalla en 2.4.9.1. En esta Tesis Doctoral no se ha tenido en cuenta la dependencia  $E$  y  $\nu$  con la temperatura, considerándose por tanto constantes. De esta manera es posible determinar la siguiente expresión para  $\dot{\bar{\epsilon}}^e$ .

$$\dot{\bar{\epsilon}}^e = \mathbf{c} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.22)$$

y recíprocamente

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C} : \dot{\bar{\epsilon}}^e \quad (3.23)$$

### 3.4.2. Procesos irreversibles. Marco termodinámico

La termodinámica de los procesos irreversibles permite modelar el comportamiento mecánico de un material. Para ello se siguen los pasos siguientes:

- Para cada proceso irreversible se definirá una variable de estado en el que el valor de dicha variable representa el estado del proceso irreversible.
- Definir una función potencial de la que deducir las leyes de estado y la definición de las variables asociadas con las variables de estado internas.
- Definir una función o potencial de disipación de la que deducir las leyes de evolución de las variables de estado asociadas a cada mecanismo irreversible.

Los procesos irreversibles que consideraremos en esta Tesis Doctoral son la deformación plástica, el endurecimiento cinemático, el endurecimiento isótropo y el daño. En la tabla 3.1 se puede ver la relación entre los procesos irreversibles, las variables de estado y las variables asociadas.

Proceso irreversible	Variable de estado	Variable asociada
Plasticidad	$\bar{\epsilon}^p$	$-\bar{\sigma}$
Endurecimiento Isótropo	$r$	$R$
Endurecimiento Cinemático	$\bar{\alpha}$	$\bar{\sigma}_b$
Daño Isótropo	$D$	$-Y$
Daño	$\bar{D}$	$-\bar{Y}$

**Tabla 3.1:** Variables de estado y asociadas para cada uno de los procesos irreversibles considerados

Donde para el daño isótropo se define:

$$Y = \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}^e \quad (3.24)$$

El potencial de disipación  $F$  establecerá las leyes de evolución de las variables de estado y deberá ser una función convexa de las variables asociadas para asegurar el cumplimiento del segundo principio de la termodinámica. En la ecuación 3.25 las variables de estado  $T$  y  $\bar{D}$  son tenidas en cuenta pero sólo como parámetros.

$$F = F(\bar{\sigma}, R, \bar{\sigma}_b, \bar{Y}; \bar{D}, T) \quad (3.25)$$



### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

Para definir la función de disipación en esta Tesis Doctoral seguiremos lo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat en (32), de manera que supondremos que  $\mathbf{F}$  está compuesta de tres sumandos como se indica en la ecuación 3.26. El primero de ellos corresponde a la función de plastificación  $f$  y tendrá en cuenta principalmente el endurecimiento isótropo acoplado con el endurecimiento cinemático. El segundo término  $F_{\sigma_b}$  será el destinado a modelar el endurecimiento cinemático. Por último, el término  $F_D$  modelará el daño. Ensayos cualitativos han mostrado que los procesos irreversibles muestran poco acoplamiento de manera que supondremos que  $F_{\sigma_b} = F_{\sigma_b}(\bar{\sigma}_b)$  y  $F_D = F_D(\bar{Y})$ .

$$F = f + F_{\sigma_b} + F_D \quad (3.26)$$

#### 3.4.2.1. Hipótesis de normalidad

La función de plastificación sirve para separar el comportamiento elástico ( $f < 0$ ) del plástico ( $f \geq 0$ ). Para determinar, una vez llegado al punto de plastificación, la “dirección” en la que evolucionará la deformación plástica, se plantea la hipótesis de normalidad que establece que el incremento del tensor de deformación plástica es proporcional a la normal de la superficie de plastificación en el espacio de las tensiones como se indica en la ecuación 3.27.

$$d\bar{\epsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \quad o \quad \dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \quad (3.27)$$

Donde  $\dot{\lambda}$  es el denominado multiplicador plástico. Para determinar las leyes de evolución de los procesos irreversibles se generalizará la hipótesis de normalidad sustituyendo la función de plastificación por el potencial de disipación y para determinar la evolución de cada variables de estado se calculará la derivada parcial del potencial de disipación respecto a la variable asociada. De esta forma, las leyes de evolución de las variables de estado de los procesos irreversibles, quedan formalmente escritas como:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial (-\bar{\sigma})} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \quad (3.28)$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} \quad (3.29)$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_b} \quad (3.30)$$

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial (-\bar{Y})} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} \quad en \quad el \quad caso \quad de \quad daño \quad anisótropo \quad (3.31)$$

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial(-Y)} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} \quad \text{en el caso de daño isótopo} \quad (3.32)$$

Las ecuaciones 3.28 a 3.32 constituyen la hipótesis de normalidad generalizada para los materiales mas comunes usados en ingeniería.

Una vez planteadas las bases teóricas sobre las que se desarrollará esta Tesis Doctoral pasaremos a concretar los términos que constituyen el potencial de disipación y a partir de ellos deduciremos el conjunto de ecuaciones que permiten calcular la evolución de un material sometido a una carga dinámica.

### 3.4.2.2. Ecuaciones de la función de plastificación

Como se comentó en el apartado 3.4.2 en la ecuación 3.26, un término del potencial de disipación lo constituye la función de plastificación. Esta función nos permitirá determinar la deformación plástica que experimentará un material al someterle a una carga a la vez que tendrá en cuenta el endurecimiento isótopo y su acoplamiento con el endurecimiento cinemático. El endurecimiento isótopo está relacionado con la densidad de las dislocaciones y representa el crecimiento de la superficie de plastificación en el espacio de las tensiones.

Muchas aplicaciones de materiales en ingeniería se producen en condiciones en las que varía la temperatura y la velocidad de deformación. Ejemplos de estas condiciones son el mecanizado, el impacto o los materiales expuestos a altas cargas y temperaturas en motores. Como se ha comentado anteriormente, los materiales muestran diferentes respuestas mecánicas dependiendo de la deformación, la deformación plástica acumulada, la velocidad de deformación y también de la temperatura. Ensayar un material para una aplicación o un diseño específico a diferentes temperaturas y velocidades de deformación para predecir su comportamiento mecánico es un proceso costoso en tiempo y dinero.

Con el objeto de modelar el comportamiento mecánico de los materiales, diversos investigadores han propuesto funciones de plastificación para describir el comportamiento del material como una función de la deformación, la velocidad de deformación y la temperatura. En general, estas funciones de plastificación definen unas superficies en el espacio de las tensiones principales que separan la zona plástica de la elástica. Algunas de ellas, además de modelar el endurecimiento isótopo, incluyen el endurecimiento debido a la tensión viscosa que se mencionó en 3.3,

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

así como el efecto de la temperatura. En la tabla 3.2 se encuentran algunas funciones de plastificación de tipo  $J_2$  propuestas por diversos investigadores.

<b>Autor</b>	<b>Ecuación <math>f = \sigma_{eq} - R(p, \dot{p}, T)</math></b>	<b>Parámetros</b>
Ludwik (1909)	$R = (\sigma_0 + K p^n)$	$\sigma_0, K, n$
Holloman (1945)	$R = (K p^n)$	$K, n$
Swift (1952)	$R = (K(p_1 + p)^n)$	$K, n, p_1 =$ <i>deformación previa</i>
Voce (1948)	$R = (\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_1)e^{-np})$	$\sigma_0, \sigma_1, n$
Tome et al (1984)	$R = (\sigma_0 + (\sigma_1 + \theta_1 p)(1 - e^{-\frac{\theta_0 p}{\sigma_1}}))$	$\sigma_0, \sigma_1, \theta_0, \theta_1$
Ludwingson (1971)	$R = (K_1 p^{n_1} + e^{(K_2 + n_2 p)})$	$K_1, n_1, K_2, n_2$
Gladman et al. (1970)	$R = (\sigma_0 + K_1 \ln(p) + K_2 p)$	$\sigma_0, K_1, K_2$
El-Magd and Troost (1977)	$R = (K p^n (\frac{p}{\dot{p}_0})^m)$	$K, n, m, \dot{p}_0$
El-Magd (1977)	$R = ([K_1(K_2 + p)^n + \eta \dot{p}]e^{(-\frac{\beta(T - T_0)}{T_m})})$	$K_1, K_2, n, \eta, \beta$
Reiff et al. (1976)	$R = (K_1 + K_2(\frac{\dot{p}}{p})^{\frac{1}{m}} + K_3 \sqrt{p})$	$K_1, K_2, m, K_3$
Johnson and Cook (1983)	$R = ([A + B p^n][1 + C \ln(\frac{p}{\dot{p}_0})][1 - (T^*)^m])$	$A, B, C, n, m$
Cowper Symond	$R = ([\sigma_0 + \beta E_p p_{eff}^P][1 + (\frac{\dot{p}_p}{D})^{\frac{1}{P}}])$	$\sigma_0, \beta, E_p, P, D$
Zerilli and Armstrong (1987)	$R = (\sigma_0 + K_1(\frac{\dot{p}_0}{\dot{p}})^{-K_3 T} + (\frac{K_2 p^n}{e^{-K_4 T}}) + K_5 d^{-\frac{1}{2}})$	$\sigma_0, K_1, \dot{p}_0, K_3, K_2,$ $n, K_4, K_5$

**Tabla 3.2: Funciones de plastificación de tipo  $J_2$**

Estas funciones de plastificación no tienen en cuenta el endurecimiento cinemático ni el daño. Para tener en cuenta ambos fenómenos y teniendo en cuenta la expresión dada en 2.5 para las funciones de plastificación de tipo  $J_2$ , basta sustituir  $\sigma_{eq}$  por  $\sigma_{\sigma_{beq}}$ , donde  $\sigma_{\sigma_{beq}}$  se define en la ecuación 3.33. Siguiendo el *principio de equivalencia de deformación*, el daño se ha tenido en cuenta al sustituir la tensión  $\bar{\sigma}$  por la tensión efectiva  $\tilde{\sigma}$ .

$$\sigma_{\sigma_{beq}} = \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D} \quad (3.33)$$

**3.4.2.2.1. Ecuación de Johnson Cook** La mayoría de las funciones de plastificación de la tabla 3.2 tienen su origen en un ajuste cualitativo de la función de plastificación a los datos experimentales. Entre ellos destaca la propuesta por Johnson y Cook (JC) por su simplicidad y por tener en consideración la influencia de la temperatura y la velocidad de deformación plástica acumulada.

El modelo propuesto por Johnson y Cook (JC) en 1983 es un modelo fenomenológico que no se basa en la teoría de la plasticidad tradicional. Trata de reproducir varias de las respuestas más significativas que se observan en condiciones dinámicas de carga en metales. Las tres respuestas principales de los materiales son el endurecimiento por deformación, el efectos de la velocidad de deformación y el ablandamiento térmico. Estos tres efectos se combinan, de una manera multiplicativa, en la función de plastificación propuesta por JC.

El modelo propuesto por JC es uno de los más ampliamente usados en la simulación de problemas dominados por altas velocidades de deformación. Es además un modelo semiempírico en el que es relativamente fácil de determinar los cinco parámetros que caracterizarían a un material conforme a este modelo. Se basa en relaciones simples y desacopladas de la tensión de plastificación con la deformación, la velocidad de deformación y la temperatura.

Como se puede comprobar a partir de la expresión 3.35, para cada material, el modelo necesita determinar 5 constantes  $A_{JC}$ ,  $B_{JC}$ ,  $C_{JC}$ ,  $n_{JC}$  y  $m_{JC}$ . En el primer término del modelo  $A_{JC}$  representa la tensión de plastificación mientras que  $B_{JC}p^{n_{JC}}$  representa el endurecimiento isótropo por deformación plástica acumulada que experimenta el material. El segundo término representa la influencia en la tensión de plastificación de la velocidad de deformación plástica acumulada. Esta influencia está representada por el término  $C_{JC} \ln(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0})$ . El tercer término representa el ablandamiento del material debido al incremento de temperatura. Este ablandamiento está representado por el término  $(T^*)^{m_{JC}}$  donde  $T^* = \frac{T - T_r}{T_m - T_r}$ , siendo  $T_r$  la temperatura de referencia y  $T_m$  la temperatura de fusión del material.

Las constantes  $A_{JC}$ ,  $B_{JC}$  y  $n_{JC}$  pueden ser extraídas de la curva de tensión-deformación obtenida a velocidades de deformación cuasi-estáticos (suponiendo que se dan unas condiciones isotérmicas) a la velocidad de deformación de referencia (generalmente tomado como  $1s^{-1}$ ). La determinación de las constantes depende de la combinación de datos en condiciones específicas y su procesamiento en gráficos adecuados. Se necesitan al menos 3 curvas de tensión-deformación

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

para formar el modelo: una en condiciones cuasi-estáticas e isotérmicas y dos a diferentes velocidades de deformación. Para el cálculo del término de la temperatura, se necesita una curva adicional más a una temperatura elevada.

A partir de la función de plastificación propuesta por JC podemos definir la variable asociada al endurecimiento isótropo como:

$$R = R_{JC} = [A_{JC} + B_{JC}p^{n_{JC}}][1 + C_{JC}\ln(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0})][1 - (T^*)^{m_{JC}}] \quad (3.34)$$

De esta manera la función de plastificación de Johnson Cook considerando el acoplamiento con el endurecimiento cinemático y el daño se puede expresar como se indica en 3.35.

$$f_{JC}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b, R_{JC}, \bar{Y}; \bar{D}, T) = \sigma_{seq}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b) - R_{JC}(p, \dot{p}, T) = \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D} - [A_{JC} + B_{JC}p^{n_{JC}}][1 + C_{JC}\ln(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0})][1 - (T^*)^{m_{JC}}] \quad (3.35)$$

En esta Tesis Doctoral, se considerará como función de plastificación la propuesta por Johnson y Cook. En relación con la aleación Ti6Al4V se han realizado multitud de estudios en los que se ha empleado el modelo de JC. En particular emplearemos los parámetros propuestos por Meyer–Kleponis en (27).

$A_{JC}$ MPa	$B_{JC}$ MPa	$C_{JC}$	$m_{JC}$	$n_{JC}$	$T_m$ ° K
896	656	0.0128	0.8	0.5	1933

**Tabla 3.3:** Parámetros de Johnson Cook de la función de plastificación del Ti6Al4V

#### 3.4.2.3. Potencial de Endurecimiento Cinemático

El endurecimiento cinemático está relacionado con el estado de concentración de las micro-tensiones internas del material. Representa el desplazamiento de la superficie de plastificación en la que  $\bar{\sigma}_b$  define el centro en cada momento del dominio elástico representado sobre el plano  $\pi$  del espacio de las tensiones principales. Para determinar como evoluciona  $\bar{\sigma}_b$ , según se indica en 3.30, es necesario definir el potencial  $F_{\sigma_b}$  con el que completar el potencial de disipación definido en 3.26. En esta Tesis Doctoral seguiremos lo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) de manera que el potencial del endurecimiento cinemático quedará modelado por la función no lineal 3.36.

$$F_{\sigma_b} = C_{\sigma_b}(T)\bar{\sigma}_b : \bar{\sigma}_b \quad (3.36)$$

En donde  $C_{\sigma_b}(T)$  es una constante dependiente sólo de la temperatura.

#### 3.4.2.4. Potencial de Disipación asociado al Daño

Hay muchas posibilidades a la hora de seleccionar una expresión analítica para la función  $F_D$  dependiendo de la interpretación de los resultados experimentales, la aplicación o situaciones en que se empleará el modelo desarrollado, etc. La mejor elección deberá basarse en aquella que tenga el menor número posible de parámetros. El marco termodinámico basado en el trabajo de J. Lemaitre y R. Desmorat en (32) y utilizado en esta Tesis Doctoral establece que la evolución del daño está gobernado por su variable asociada  $\bar{Y}$  y por lo tanto el Potencial de Disipación asociado al Daño ( $F_D$ ) debe ser una función de dicha variable. Muchos resultados experimentales concluyen que dicho potencial tiene una dependencia no lineal con la densidad de energía elástica y por tanto la variable asociada  $\bar{Y}$  debe ser una función de dicha densidad de energía. En esta Tesis Doctoral seguiremos lo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat en (32) de manera que una posible elección para  $F_D$  para el daño isótropo y anisótropo es la presentada en 3.37 y 3.38 respectivamente.

$$F_D = \frac{S}{(1-D)(\beta_D + 1)} \left( \frac{Y(\bar{\epsilon}^e)}{S} \right)^{\beta_D + 1} \quad \text{en el caso de daño isótropo} \quad (3.37)$$

$$F_D = \left( \frac{Y(\bar{\epsilon}^e)}{S} \right)^{\beta_D} \bar{Y} : \left| \frac{d\bar{\epsilon}^p}{dr} \right| \quad \text{en el caso de daño anisótropo} \quad (3.38)$$

En donde  $S$  es una constante dependiente del material, el operador  $|\cdot|$  aplicado a un tensor significa el valor absoluto en términos de las componentes principales y la variable  $Y(\bar{\epsilon}^e)$  se define en 3.39.

$$Y(\bar{\epsilon}^e) = (\tilde{\sigma} : \bar{\epsilon}^e) = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{E} \left( \frac{2(1+\nu)}{3} + 3(1-2\nu) \left( \frac{\tilde{\sigma}_H}{\tilde{\sigma}_{eq}} \right)^2 \right) \quad (3.39)$$

Donde se han tenido en cuenta las expresiones 3.17, 3.18 y A.32 y se define  $\tilde{\sigma}_H = \frac{tr(\tilde{\sigma})}{3}$ .

#### 3.4.3. Ecuaciones de Evolución de las Variables de Estado

Una vez definidos todos los términos que integran el potencial de disipación establecido en 3.26 es posible determinar las leyes que gobiernan la evolución de las variables de estado (ver tabla 3.1) que se han tenido en cuenta en el marco termodinámico que estamos considerando en esta Tesis Doctoral. Estas leyes de evolución son las definidas en 3.28, 3.29, 3.30, 3.31 y 3.32. Hay que destacar que las leyes de evolución que se plantearán a continuación son válidas para modelos constitutivos que definan una superficie de plastificación genérica de tipo  $J_2$ , según se define en 2.5, como las listadas en la tabla 3.2.

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

#### 3.4.3.1. Endurecimiento Isótopo y Deformación Plástica

Como se indicó en 3.28 y 3.29, la evolución del endurecimiento isótopo y la deformación plástica se puede calcular a partir del potencial de disipación. Teniendo en cuenta la definición de la función de plastificación de Johnson y Cook según se expresa en 3.35 así como el Potencial de Endurecimiento Cinemático definido en 3.36, el Potencial de Disipación asociado al Daño definido en 3.37 o 3.38 y el desarrollo indicado en D.10 se tiene:

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{(\bar{H}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D \bar{H})^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} = \\ &\dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{(\bar{H}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D \bar{H})^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} \quad \text{en el caso de daño anisótropo} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2(1-D)} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} \quad \text{en el caso de daño isótopo} \quad (3.42)$$

Donde  $\bar{H}$  está definida en 2.24 o 2.32 según corresponda al modelo de daño anisótropo o isótopo respectivamente. Definiendo las siguientes variables:

$$\bar{n}^X = \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} \quad (3.43)$$

$$\bar{n} = (\bar{H} \bar{n}^X \bar{H})^D \quad \text{en el caso de daño anisótropo} \quad (3.44)$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{n}^X}{(1-D)} \quad \text{en el caso de daño isótopo} \quad (3.45)$$

Considerando la definición de  $\dot{p}$ , expresado en 3.5, y 3.40 se tiene:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \bar{n} = \dot{r} \bar{n} \quad (3.46)$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \bar{n} : \bar{n}} = \dot{r} \sqrt{\frac{2}{3} \bar{n} : \bar{n}} \quad (3.47)$$

que para el caso de daño isótopo queda:

$$\dot{p} = \dot{r} \sqrt{\frac{2}{3} \bar{n} : \bar{n}} = \dot{r} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\bar{n}^X}{(1-D)} : \frac{\bar{n}^X}{(1-D)}} = \frac{\dot{r}}{(1-D)} \quad (3.48)$$

y por tanto se tiene:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} \quad (3.49)$$

### 3.4.3.2. Ecuaciones del Endurecimiento Cinemático

Para determinar la evolución de la variable de estado  $\bar{\alpha}$  consideraremos una ley de estado que establezca una relación lineal entre dicha variable y la variable asociada  $\bar{\sigma}_b$  al endurecimiento cinemático:

$$C_\alpha(T)\bar{\alpha} = \bar{\sigma}_b \quad (3.50)$$

Como se indicó en 3.28 y 3.30 la evolución del endurecimiento cinemático se puede calcular a partir del potencial de disipación. Teniendo en cuenta la definición de la función de plastificación de Johnson y Cook según se expresa en 3.35 así como el Potencial de Endurecimiento Cinemático definido en 3.36 y el Potencial de Disipación asociado al Daño definido en 3.37 o 3.38 y el desarrollo indicado en D.11 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}} &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_b} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_b} - \dot{\lambda} \frac{\partial F_{\sigma_b}}{\partial \bar{\sigma}_b} = \\ &= \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} - \dot{\lambda} \frac{\partial (C_{\sigma_b}(T)\bar{\sigma}_b : \bar{\sigma}_b)}{\partial \bar{\sigma}_b} = \\ &= \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} - \dot{\lambda} 2C_{\sigma_b}(T)\bar{\sigma}_b \end{aligned} \quad (3.51)$$

Teniendo en cuenta 3.43 y 3.50 se tiene:

$$\frac{d(\frac{\bar{\sigma}_b}{C_\alpha(T)})}{dt} = \dot{\bar{m}} \quad (3.52)$$

Donde se ha definido  $\bar{m}$  como:

$$\bar{m} = \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} - 2C_{\sigma_b}(T)\bar{\sigma}_b = \bar{n}^X - 2C_{\sigma_b}(T)\bar{\sigma}_b \quad (3.53)$$

Es importante destacar que tanto  $\bar{\sigma}_b$  como  $\bar{\alpha}$  son tensores desviadores ya que por definición  $\bar{n}^X$  es desviador y se asume que inicialmente  $\bar{\sigma}_b(t=0) = \bar{\mathbf{0}}$ .

En esta Tesis Doctoral asumiremos que  $C_\alpha(T)$  y  $C_{\sigma_b}(T)$  son constantes que no dependen de la temperatura y por tanto 3.52 se puede expresar como:

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}_b}{C_\alpha} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} - 2C_{\sigma_b}\bar{\sigma}_b \quad (3.54)$$



### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

Para la determinación de los parámetros que definen el endurecimiento cinemático se ha recurrido a lo publicado por otros autores, en particular a lo indicado por Boyce y Chen en (10). Teniendo en cuenta la diferencia de las expresiones empleadas en esta Tesis Doctoral y las utilizadas por Boyce y Chen y su correspondiente equivalencia, los valores de los parámetros referentes al endurecimiento cinemático son las indicadas en la tabla 3.4.

$C_\alpha(MPa)$	$C_{\sigma_b}(MPa^{-1})$
0.92e5	3.4511e-3

**Tabla 3.4: Parámetros de Endurecimiento Cinemático del Ti6Al4V**

#### 3.4.3.3. Ecuaciones de Daño

Como se indicó en 3.31 y 3.32 la evolución del Daño se calcula a partir del potencial de disipación. Teniendo en cuenta la definición de la función de plastificación de Johnson y Cook según se expresa en 3.35 así como el Potencial de Endurecimiento Cinemático definido en 3.36 y el Potencial de Disipación asociado al Daño definido en 3.37 o 3.38 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} \left| \frac{d\bar{\epsilon}^p}{dr} \right| = \dot{r} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} \left| \frac{d\bar{\epsilon}^p}{dr} \right| = \\ \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} |\dot{\bar{\epsilon}}^p| \quad \text{en el caso de daño anisótropo} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda} \frac{1}{(1-D)} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} = \frac{\dot{r}}{(1-D)} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} = \\ \dot{p} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} \quad \text{en el caso de daño isotrópico} \end{aligned} \quad (3.56)$$

#### 3.4.4. Disipación de Energía

La comprensión del acoplamiento entre la deformación plástica y la evolución de la temperatura es un asunto clave en los procesos que involucran la deformación a alta velocidad de deformación. Este entendimiento permitirá conseguir una predicción fiable del campo de temperaturas y el ablandamiento térmico asociado. Ejemplos de aplicaciones en las que son necesarios modelos precisos para la generación de calor incluyen el mecanizado de alta velocidad, la penetración balística, aquellos procesos en los que aparecen las denominadas bandas adiabáticas de cortadura, crecimiento dinámico de microvacíos, etc..

Cuando los metales experimentan grandes deformaciones plásticas, se generan cantidades significativas de calor. Si el proceso de deformación es lo suficientemente rápido, la generación

de calor provoca grandes aumentos de temperatura ya que no hay tiempo para conducir el calor fuera de la zona de deformación. En estos casos, las condiciones pueden ser asumidas como esencialmente adiabáticas. Incluso a velocidades de deformación moderadas, la deformación plástica a menudo puede ser tratada como esencialmente adiabática si el coeficiente de transferencia de calor es pequeño. El aumento de la temperatura causa ablandamiento térmico en el metal y modifica sus propiedades mecánicas y prestaciones.

En el modelo constitutivo propuesto en esta Tesis Doctoral, y para el caso de daño isótropo, el segundo principio de la termodinámica, escrito como la desigualdad Clausius-Duhem, establece:

$$\bar{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + Y\dot{D} - \dot{w}_s - \bar{q} \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (3.57)$$

Esto significa que la disipación de energía debido al trabajo plástico  $\bar{\sigma} : \dot{\epsilon}^p$  mas la disipación debida al daño o deterioro del material  $Y\dot{D}$  menos la energía almacenada  $\dot{w}_s$  mas la energía térmica (  $\bar{q}$  es el flujo de calor) es transformado en calor.

De acuerdo a 3.57 cada fenómeno irreversible considerado en el modelo constitutivo del material constituye una fuente de disipación de energía. En esta Tesis Doctoral los dos fenómenos irreversibles que se tendrán en cuenta son el daño y el trabajo plástico. Teniendo en cuenta la relación entre tensión efectiva y la tensión de Cauchy 2.34, asumiendo el modelo de daño isótropo, la disipación de potencia asociada a la deformación plástica es:

$$W^p = (1 - D) \frac{\bar{\sigma} : \dot{\epsilon}^p}{\rho} \quad (3.58)$$

Por otro lado, la disipación de potencia asociada al daño es:

$$W^D = \frac{Y\dot{D}}{\rho} \quad (3.59)$$

La disipación de potencia específica total es la suma de ambas disipaciones específicas de potencia:

$$W^{Tot} = \frac{\bar{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + Y\dot{D}}{\rho} \quad (3.60)$$

No todo el trabajo mecánico realizado durante el proceso de deformación plástica en los metales es transformada en calor, parte de este trabajo mecánico es almacenado en la micro-estructura del material. La energía almacenada es una característica esencial del denominado estado de trabajo frío, y representa el cambio en la energía interna del metal. Debe señalarse

### 3. MODELO CONSTITUTIVO

---

que la energía almacenada de trabajo frío permanece en el material después de la eliminación de cargas externas.

Es generalmente aceptado que la mayoría de la energía mecánica se disipa en forma de calor durante la deformación plástica. La fracción de la potencia plástica disipada en forma de calor  $\eta_{QT}$  se asume generalmente como un parámetro constante que suele estar en torno al 90 % para la mayoría de los metales. Asumiendo un comportamiento adiabático (el flujo de calor es despreciable frente a la potencia disipada) y sólo se consideran como fuentes de calor la disipación de potencia asociado a la deformación plástica y al daño, el calentamiento del material se determina por la siguiente ecuación:

$$c_v \dot{T} \rho = \eta_{QT} (\bar{\sigma} : \dot{\epsilon}^p + Y \dot{D}) \quad (3.61)$$

Donde  $\rho$  es la densidad,  $c_v$  es el calor específico y  $\eta_{QT}$  es el coeficiente de Quinney-Taylor. Para la evolución de la temperatura, asumiendo un comportamiento adiabático y teniendo en cuenta 2.34, 3.49, 3.56 y 3.61, se tiene:

$$c_v \dot{T} \rho = \dot{\eta}_{QT} \left( (1 - D) \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma} : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} + Y \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} \right) \quad (3.62)$$

## 4

# Resolución Numérica

Este Capítulo se centra en el desarrollo de un algoritmo numérico eficiente, basado en la integración de las leyes de la evolución totalmente acopladas con el modelo de daño establecidas en el Capítulo 3 Modelo Constitutivo. Este algoritmo numérico reduce el conjunto de incógnitas tensoriales y escalares considerados en las ecuaciones constitutivas a un sistema de ecuaciones no lineales compuesto de tres ecuaciones escalares y tres incógnitas escalares. Aunque todo el desarrollo del algoritmo numérico es independiente de la función de plastificación de tipo  $J_2$ , se particularizará para la aplicación del modelo de Johnson-Cook que se utilizará en la aplicación y posterior validación del algoritmo numérico. Además, en esta sección se propone un conjunto de constantes y parámetros que transforman el problema formulado en un problema adimensional cuyas variables físicas son de un orden de magnitud unidad. Finalmente se muestra el procedimiento de resolución implementado dentro de la subrutina de usuario VUMAT correspondiente al sistema de ecuaciones que se indican en 4.3 Recopilación de Ecuaciones. Adicionalmente, se formula la expresión para el Operador Tangente Consistente necesario para esquemas de integración implícita en elementos finitos.

### 4.1. Introducción

Las ecuaciones planteadas en el Capítulo 3 Modelo Constitutivo constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Para su resolución es necesario recurrir a técnicas de integración numéricas. En este tipo de problemas, la resolución por el método de los elementos finitos se ha mostrado como un medio eficaz capaz de proporcionar soluciones aproximadas válidas permitiendo análisis cuantitativos y cualitativos de gran valor.

## 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

La eficiencia de la integración numérica de las ecuaciones constitutivas tiene un impacto directo sobre la eficiencia global de la resolución por el método de los elementos finitos. Esto es particularmente cierto cuando se trata de modelos constitutivos complejos como el planteado en el Capítulo 3 Modelo Constitutivo. El uso de modelos constitutivos complejos puede requerir un incremento drástico de los tiempos de cálculo.

La manera de resolver estos sistema de ecuaciones en los que existe un total acoplamiento del daño con el resto de variables mecánicas afecta considerablemente tanto a la precisión como al coste computacional. Para abordar la resolución de estos modelos constitutivos se pueden considerar tres algoritmos de integración con diferentes niveles de acoplamiento entre el daño y el resto de variables mecánicas. Los tres niveles de acoplamiento que se pueden establecer son:

- El primero llamado desacoplado consiste en calcular el daño en cada paso de tiempo de integración conforme a sus leyes de evolución pero sin hacerlo intervenir en el resto de ecuaciones. Para ello se resuelven todas las ecuaciones excepto la de evolución del daño de manera iterativa en cada paso del tiempo pero sin tener en cuenta el daño y una vez resueltas todas las incógnitas se resuelve la ecuación de evolución del daño. Este método es el menos preciso pues no tiene en cuenta el deterioro progresivo del material y su influencia en la respuesta mecánica del mismo. Por otro lado, es el método más rápido computacionalmente.
- El segundo método denominado semiacoplado consiste en resolver todas las ecuaciones excepto la de evolución del daño de manera iterativa pero considerando en cada paso de tiempo que el daño es el calculado en el paso de tiempo anterior. Una vez resueltas esas ecuaciones se calcula la evolución del daño teniendo en cuenta las nuevas variables calculadas en el paso de tiempo actual. Este método de integración es más preciso que el anterior ya que incorpora el deterioro progresivo del material si bien no lo hace de forma completa y es ligeramente menos rápido que el anterior.
- El tercer método denominado totalmente acoplado consiste en resolver simultáneamente todas las ecuaciones constitutivas para cada iteración y para cada paso de tiempo. Este método de integración es el más preciso de todos ya que resuelve de manera totalmente acoplada todas las ecuaciones del modelo constitutivo pero con un coste computacional considerablemente superior debido al acoplamiento de todas sus ecuaciones e incógnitas.

En esta Tesis Doctoral emplearemos el código de elementos finitos ABAQUS que ofrece a sus usuarios la posibilidad de desarrollar subrutinas de código con las que implementar modelos constitutivos del material no ofrecidos por la aplicación. Para problemas no estacionarios, ABAQUS ofrece la subrutina VUMAT que permite la implementación de modelos constitutivos del material para su posterior integración numérica temporal. Para cada elemento en que se ha discretizado el material y cada incremento de tiempo ( $\delta t$ ) la subrutina VUMAT proporciona, entre otras variables, como entradas:

- El incremento de tiempo del ciclo de integración actual ( $\Delta t_{n+1}$ )
- El incremento del tensor de deformaciones correspondiente al ciclo de integración actual ( $\Delta \bar{\epsilon}(t_{n+1})$ ).
- Las temperaturas del ciclo de integración actual y del anterior ( $T(t_{n+1})$  y  $T(t_n)$ ). Si bien  $T(t_{n+1})$  puede ser modificada por el usuario y ser a la vez una variable de salida, como sucede en el caso de suponer que el problema es adiabático.
- El tensor de tensiones correspondiente al ciclo de integración anterior ( $\bar{\sigma}(t_n)$ ).
- La energía interna almacenada del ciclo de integración anterior.
- La energía disipada del ciclo de integración anterior.

Las variables de salida que se deben calcular son:

- Opcionalmente la temperatura del ciclo de integración actual ( $T(t_{n+1})$ ).
- El tensor de tensiones correspondiente al ciclo de integración actual ( $\bar{\sigma}(t_{n+1})$ ).
- La energía interna almacenada del ciclo de integración actual.
- La energía disipada del ciclo de integración actual.

Con este conjunto de variables es posible plantear un esquema de integración numérico basado en un Euler implícito.

## 4.2. Principio de Objetividad

Uno de los principios fundamentales que todas las ecuaciones constitutivas tienen que satisfacer es el principio de objetividad o la indiferencia respecto al sistema de referencia. De acuerdo con este principio, las ecuaciones constitutivas deben ser invariantes ante un cambio de sistema

## 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

de referencia. Siguiendo el principio de indiferencia frente al sistema de referencia, cualquier propiedad o magnitud física utilizada para establecer las ecuaciones constitutivas tiene que ser descrita por los correspondientes tensores de esas propiedades de manera que cumplan la regla de transformación, denominada transformación objetiva, entre los diferentes sistemas de coordenadas. En esta sección se muestra una breve explicación sobre el gradiente de deformaciones y las velocidades de deformación así como su relación con el principio de objetividad.

Las leyes de la evolución que se describen en el Capítulo 3 Modelo Constitutivo indican la variación temporal de las propiedades mecánicas expresadas como derivadas temporales de un tensor o un escalar. La integración de esas expresiones requiere la selección adecuada de una derivada objetiva, ya que la solución aportada por los códigos de elementos finitos es dependiente de la derivada objetiva seleccionada y especialmente si se incluye el endurecimiento cinemático en las ecuaciones constitutivas como revelaron los trabajos de Lehmann (31) y Nagtegaal y De Jong (36). Esos trabajos demostraron la obtención de resultados físicamente imposibles, cuando se utilizaba la derivada objetiva de Jaumann, al integrar modelos constitutivos acoplados con el endurecimiento cinemático. En este sentido, la subrutina de usuario VUMAT proporcionada por ABAQUS/Explicit considera una derivada objetiva, la de Green-Naghdi, que por el momento no ha mostrado resultados incoherentes cuando se incluye el endurecimiento cinemático entre las ecuaciones constitutivas.

### 4.2.1. Gradiente de deformación y velocidades de deformación

Se considera que  $\bar{\mathbf{X}}$  y  $\bar{\mathbf{X}} + d\bar{\mathbf{X}}$  son dos partículas materiales infinitesimalmente cercanas en la configuración de referencia y  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}$  son las mismas partículas materiales infinitesimalmente cercanas en la configuración actual. El gradiente de deformación  $\bar{\mathbf{F}}$  se define a partir de la siguiente expresión:

$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}} d\bar{\mathbf{X}} \quad (4.1)$$

Se puede demostrar que  $\bar{\mathbf{F}}$  puede descomponerse de manera única de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{R}} \quad (4.2)$$

Donde  $\bar{\mathbf{R}}$  es un tensor ortogonal, es decir ( $\det \bar{\mathbf{R}} = 1$ ) denominado rotación, y  $\bar{\mathbf{U}}$  y  $\bar{\mathbf{V}}$  son matrices simétricas definidas positivas. Esto se conoce como la descomposición polar.  $\bar{\mathbf{U}}$  y  $\bar{\mathbf{V}}$  se denominan tensor de alargamiento por derecha e izquierda, respectivamente. La primera descomposición representa que la deformación total se compone de un alargamiento, representado

por la matriz  $\bar{\mathbf{U}}$ , seguido de una rotación como sólido rígido, representada por la matriz  $\bar{\mathbf{R}}$ . La segunda descomposición considera la deformación total como la rotación  $\bar{\mathbf{R}}$  seguida de un alargamiento  $\bar{\mathbf{V}}$ .

Para el mismo par de partículas de material mencionadas anteriormente, la diferencia entre sus velocidades espaciales es:

$$d\bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\boldsymbol{\ell}} d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\boldsymbol{\ell}} \bar{\mathbf{F}} d\bar{\mathbf{X}} \quad (4.3)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\ell}}$  esta definido por:

$$\bar{\boldsymbol{\ell}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \quad (4.4)$$

Se puede descomponer  $\bar{\boldsymbol{\ell}}$  en sus partes simétricas y antisimétricas:

$$\bar{\boldsymbol{\ell}} = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\ell}} + \bar{\boldsymbol{\ell}}^T) + \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\ell}} - \bar{\boldsymbol{\ell}}^T) = \bar{\mathbf{d}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.5)$$

La parte simétrica de  $\bar{\boldsymbol{\ell}}$  es el tensor de velocidad de deformación  $\bar{\mathbf{d}}$  definido como:

$$\bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} + \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right)^T \right] \quad (4.6)$$

La parte antisimétrica de  $\bar{\boldsymbol{\ell}}$  es el tensor de rotación  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  asociado al gradiente de velocidad del material definido como:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} - \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right)^T \right] \quad (4.7)$$

#### 4.2.2. Derivada Objetiva

Muchos de los materiales utilizados en ingeniería presentan un comportamiento que depende del estado de cargas al que ha sido sometido en el pasado, y por tanto sus ecuaciones constitutivas están formuladas en función de derivadas temporales. En particular, las ecuaciones constitutivas para fenómenos no reversibles tienen que ser formuladas como la relación entre las derivadas temporales de las correspondientes variables asociadas a los fenómenos no reversibles y la tensión y las variables internas. Por lo tanto, las derivadas temporales de los tensores utilizados en las ecuaciones constitutivas tienen que ser objetivas y las propiedades mecánicas deben ser descritas por un único conjunto de ecuaciones independientes de la configuración y/o rotación relativa entre el material y los observadores.



#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

En la formulación del modelo constitutivo de sólidos sometidos a grandes deformaciones, que por lo general implica relaciones entre la tensión y velocidades de deformación, es necesario tener en cuenta el efecto de la rotación de material. Una rotación espacial como sólido rígido se puede describir como un tensor de segundo orden  $\mathbf{Q}$  cumpliendo las siguientes relaciones:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{1}} \quad (4.8)$$

y

$$\det \mathbf{Q} = 1 \quad (4.9)$$

Dado que  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \bar{\mathbf{1}}$  es fácil demostrar que  $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$  es antisimétrico:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \bar{\mathbf{1}} \implies \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = -(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^T \quad (4.10)$$

Un vector  $\bar{\mathbf{v}}$  y un tensor  $\bar{\mathbf{A}}$  se dice que son objetivos si cumplen con la siguiente regla de transformación:

$$\bar{\mathbf{v}}^+ = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{v}} \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^+ = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T \quad (4.12)$$

Para un tensor de segundo orden  $\bar{\mathbf{A}}$  que se transforma de manera objetiva, se puede demostrar que su derivada temporal  $\dot{\bar{\mathbf{A}}}^+$  en general no es objetiva:

$$\dot{\bar{\mathbf{A}}}^+ = \dot{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (4.13)$$

Ahora consideremos un tensor  $\bar{\mathbf{A}}$  cuyas componentes están asociados con unas direcciones espaciales. En un instante dado  $\mathbf{t}$  consideremos unir a un sistema de referencia una base vectorial,  $\bar{\mathbf{b}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Estos vectores no se pueden estirar, pero están ligados al sistema de referencia de modo que giran solidariamente con él. Podemos escribir el tensor en términos de sus componentes como:

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij}\bar{\mathbf{b}}_i\bar{\mathbf{b}}_j^T \quad (4.14)$$

En este caso las derivadas temporales de la base vectorial pueden calcularse conforme a las siguientes expresiones:

$$\dot{\bar{\mathbf{b}}}_i = \bar{\Omega}\bar{\mathbf{b}}_i \implies \dot{\bar{\mathbf{b}}}_i^T = \bar{\mathbf{b}}_i^T\bar{\Omega}^T \quad (4.15)$$

donde  $\bar{\Omega}$  es un tensor de giro antisimétrico asociado a la rotación del sistema de referencia. Por lo tanto la derivada temporal del tensor  $\bar{\mathbf{A}}$  es:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{A}}}_{ij} = \dot{A}_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\mathbf{b}}_j^T + A_{ij} \dot{\bar{\mathbf{b}}}_i \bar{\mathbf{b}}_j^T + A_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \dot{\bar{\mathbf{b}}}_j^T = \dot{A}_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\mathbf{b}}_j^T + A_{ij} \bar{\Omega} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\mathbf{b}}_j^T + A_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\Omega}^T \bar{\mathbf{b}}_j^T = \\ \dot{A}_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\mathbf{b}}_j^T + \bar{\Omega} A_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\mathbf{b}}_j^T - A_{ij} \bar{\mathbf{b}}_i \bar{\Omega}^T \bar{\mathbf{b}}_j^T \end{aligned} \quad (4.16)$$

Que en notación tensorial puede ser expresada como:

$$\dot{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\dot{\mathbf{A}}} + \bar{\Omega} \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}} \bar{\Omega} \quad (4.17)$$

Los términos segundo y tercero de la derivada temporal de  $\bar{\mathbf{A}}$  son debidos al giro como sólido rígido, mientras que el primer término es la parte de  $\bar{\mathbf{A}}$  causado por otros efectos (en el caso de la tensión, la derivada temporal asociada a la respuesta constitutiva), llamada la derivada corrotacional de  $\bar{\mathbf{A}}$ . Por lo tanto la derivada corrotacional de un tensor  $\bar{\mathbf{A}}$  se define por:

$$\bar{\dot{\mathbf{A}}} = \dot{\bar{\mathbf{A}}} + \bar{\mathbf{A}} \bar{\Omega} - \bar{\Omega} \bar{\mathbf{A}} \quad (4.18)$$

Muchas derivadas objetivas, aunque no todas, pueden expresarse como 4.18 eligiendo  $\bar{\Omega}$  de manera que  $\bar{\dot{\mathbf{A}}}$  se transforme de manera objetiva conforme a la regla de transformación 4.12. Como señaló Hughes (24), dado una  $\bar{\Omega}$  podemos generar un grupo de rotaciones  $\mathcal{S}$  de tal manera que:

$$\dot{\mathcal{S}} = \bar{\Omega} \mathcal{S} \quad \mathcal{S}_{t=0} = \bar{\mathbf{I}} \quad (4.19)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{S} \mathcal{S}^T = \mathcal{S}^T \mathcal{S} = \bar{\mathbf{I}}$  y que  $\bar{\Omega}$  es un tensor antisimétrico elegido de forma que  $\bar{\dot{\mathbf{A}}}$  se transforma de manera objetiva puede demostrarse, Doghri (15), la siguiente relación:

$$\dot{\bar{\mathbf{A}}}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^T (\dot{\bar{\mathbf{A}}} + \bar{\mathbf{A}} \bar{\Omega} - \bar{\Omega} \bar{\mathbf{A}}) \mathcal{S} = \mathcal{S}^T \bar{\dot{\mathbf{A}}} \mathcal{S} \implies \bar{\dot{\mathbf{A}}} = \dot{\bar{\mathbf{A}}}_{\mathcal{S}} \mathcal{S}^T \quad (4.20)$$

donde

$$\bar{\mathbf{A}}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^T \bar{\mathbf{A}} \mathcal{S} \quad (4.21)$$

Esto significa que una expresión complicada de la derivada de un tensor  $\bar{\dot{\mathbf{A}}}$  se puede calcular a partir de una simple derivada temporal del tensor rotado asociado  $\dot{\bar{\mathbf{A}}}_{\mathcal{S}}$  de acuerdo con la rotación  $\mathcal{S}$  definida anteriormente.

En cuanto a la mecánica de sólidos deformables, mientras que todas las variables de estado obedezcan la regla de transformación objetiva, para las derivadas temporales se tienen que adoptar los tensores pertinentes que obedezcan la regla de transformación objetiva independiente de

#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

la rotación de material. Además, tienen que ser magnitudes físicas capaces de describir las derivadas temporales de las propiedades mecánicas teniendo en cuenta la rotación de material. La derivada corrotacional de tensores objetivos es una candidata apropiada para ser derivadas objetivas debido a que garantizan que cualquier rotación rígida superpuesta no tienen efecto alguno sobre ellos. Por lo tanto, con el fin de describir la respuesta del material independientemente de las rotaciones como sólido rígido, se debe utilizar la derivada corrotacional de los tensores y consecuentemente el uso de modelos constitutivos expresados en términos de la derivada corrotacional es de gran importancia en mecánica de sólidos y, en particular, en la deformación plástica de materiales.

En el pasado se han presentado numerosas derivadas objetivas, ver Truesdell y Toupin (49). Teniendo en cuenta la existencia de un gran número de derivadas objetivas se plantea la cuestión de si todas ellas son igualmente adecuadas. Varios trabajos han demostrado la influencia de la derivada objetiva en los resultados, mostrando que para algunas de estas derivadas objetivas y en determinados casos aparecen fenómenos espureos inesperados conocidos como oscilaciones de cortadura. En los códigos de elementos finitos se usan ampliamente las derivadas objetivas de Jaumann y de Green-Naghdi. La derivada objetiva de Jaumann se define por las siguientes relaciones:

$$\dot{\bar{\mathbf{A}}}_s^{\nabla J} = (\dot{\bar{\mathbf{A}}} + \bar{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}\bar{\mathbf{A}}) \quad (4.22)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  es el tensor de giro asociado al gradiente de velocidad del material  $\bar{\boldsymbol{\ell}}$  tal como fue definido en 4.7. La derivada objetiva de Green-Naghdi se define por las siguientes relaciones:

$$\dot{\bar{\mathbf{A}}}_s^{\nabla_{GN}} = \dot{\bar{\mathbf{A}}} + \bar{\mathbf{A}}(\dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T) - (\dot{\bar{\mathbf{R}}}\bar{\mathbf{R}}^T)\bar{\mathbf{A}} \quad (4.23)$$

donde  $\bar{\mathbf{R}}$  es la rotación procedente de la descomposición polar del gradiente de deformación  $\bar{\mathbf{F}}$  definido en 4.2.

Lehmann (31) fue el primero en revelar que el modelo termoviscoplastico de tipo  $J_2$  acoplado con el modelo de endurecimiento cinemático de Prager podría predecir, utilizando la derivada objetiva de Jaumann, una respuesta oscilante en la tensión de cortadura bajo una deformación de cortadura simple progresando monotonamente. Diez años más tarde, este fenómeno fue redescubierto por Nagtegaal y De Jong (36). Nagtegaal y De Jong evaluaron numéricamente un esfuerzo cortante simple utilizando la derivada objetiva de Jaumann en un modelo constitutivo que incluía el endurecimiento cinemático lineal propuesto por Prager. Se encontraron con una

tensión de cortadura oscilatoria como respuesta a una deformación de cortadura monotonamente creciente lo que es físicamente poco razonable. Tales resultados tan poco fiables pueden tener efectos considerablemente negativos en la descripción de las deformaciones elastoplásticas.

La derivada objetiva de Jaumann se solía utilizar antes de la publicación de Nagtegaal y De Jong y desde entonces se han hecho extensos debates y estudios para clarificar este fenómeno. Se han sugerido diversas derivadas objetivas como alternativas plausibles a la de Jaumann como las derivadas objetivas de Green- Naghdi o las derivadas de Lie. Se ha encontrado que el uso de la derivada objetiva de Green-Naghdi produce una respuesta razonable con una tensión de cortadura monótona. Por otro lado, cuando se ha usado la derivada objetiva de Green-Naghdi para el estudio de un único ciclo de deformación recuperando la forma original una sola vez, los resultados han mostrado magnitudes de la tensión residual consideradas aceptables para pequeñas deformaciones.

El esquema de integración numérica propuesto que se presentará en las secciones siguientes, se ha implementado en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Explicit y su validez y prestaciones se han demostrado a través de la simulación numérica de casos de impacto a alta velocidad. Como se comentó anteriormente ABAQUS/Explicit permiten definir el modelo constitutivo de un material desde un punto de vista mecánico por medio de la subrutina de usuario VUMAT. En esta subrutina de usuario, todas las tensiones, deformaciones, estiramientos y variables de estado se definen según la orientación de los ejes locales del material. Estos ejes locales del material forman una base que se usa para almacenar las componentes de la tensión y deformación. Esto representa un sistema de coordenadas corrotacional en el que la base gira con el material. En particular, para operar con el tensor de tensiones al definir el comportamiento mecánico del material, la subrutina de usuario VUMAT utiliza la derivada objetiva de Green-Naghdi. Por lo tanto, en este trabajo las derivadas temporales relativas al modelo constitutivo correspondientes al endurecimiento cinemático e isótropo y el daño se expresarán conforme a la derivada objetiva de Green-Naghdi y por tanto se omitirán los superíndices que hacen referencia a dicha derivada objetiva ( $\nabla^{GN}$ ).

### 4.3. Recopilación de Ecuaciones

Como se puede comprobar a partir de lo indicado en 3.4.3.1 Endurecimiento Isótropo y Deformación Plástica y en 3.4.3.3 Ecuaciones de Daño el modelo de daño anisótropo es bastante más complejo que el modelo de daño isótropo. A pesar de esta gran diferencia entre ambos modelos

#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

de daño, el procedimiento de integración numérica planteado por J. Lemaitre y R. Desmorat en (32) es similar requiriendo en ambos casos construir e invertir una matriz Jacobiana de 28x28, todo ello dentro de un esquema numérico basado en un método de Euler implícito en el que para cada incremento de tiempo se plantea un método de Newton-Raphson como proceso iterativo. En cada iteración es necesario construir e invertir dicha matriz Jacobiana con el consiguiente coste computacional. Es por ello que en esta Tesis Doctoral nos centraremos en el modelo de daño isótropo para el que plantearemos un esquema numérico de integración más eficiente que el planteado por J. Lemaitre y R. Desmorat en (32).

A continuación, y antes de plantear el esquema de resolución, se resume el conjunto de ecuaciones planteadas en el Capítulo 3 Modelo Constitutivo que permiten calcular la evolución de las variables mecánicas y térmicas.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^T \quad (4.24)$$

$$\dot{\epsilon}^T = \alpha \dot{T} \bar{\mathbf{1}} \quad (4.25)$$

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon}^e \quad (4.26)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{1-D} \bar{\sigma} \quad (4.27)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} \quad (4.28)$$

$$f = (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq} - R(p, \dot{p}, T, \dots) = 0 \quad (4.29)$$

$$\dot{\sigma}_b = \dot{p}(1-D) \frac{3C_\alpha}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} - 2C_\alpha C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b \quad (4.30)$$

$$\dot{D} = \begin{cases} \dot{p} \left( \frac{(\tilde{\sigma} : \bar{\epsilon}^e)}{S} \right)^{\beta_D} & \text{if } p \geq p_D \\ 0 & \text{if } p < p_D \end{cases} \quad (4.31)$$

$$c_v \dot{T} \rho = \dot{p} \eta_{QT} \left( (1-D) \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma} : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} + \frac{(\tilde{\sigma} : \bar{\epsilon}^e)^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right) \quad (4.32)$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $\dot{p} = \frac{\dot{r}}{(1-D)}$  para el modelo de daño isótropo, que  $\mathbf{C}$  se define en 3.16 y que  $\mathbf{Y}(\bar{\epsilon}^e) = (\tilde{\sigma} : \bar{\epsilon}^e)$ .

En total tenemos seis incógnitas tensoriales ( $\tilde{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}^T$ ,  $\bar{\epsilon}^p$ ,  $\bar{\epsilon}^e$ ,  $\bar{\sigma}_b$ ) y tres incógnitas escalares ( $D$ ,  $T$  y  $p$ ) para las que contamos con seis ecuaciones tensoriales 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.28 y 4.30 y tres ecuaciones escalares 4.29, 4.31 y 4.32. No obstante la incógnita tensorial  $\bar{\sigma}$  se puede resolver con la ecuación 4.27 una vez calculada  $\tilde{\sigma}$  y  $D$ .

#### 4.4. Algoritmo de Resolución

Para resolver este sistema de ecuaciones es conveniente desarrollar un algoritmo de integración numérica adecuado para ser incorporado a cualquiera de los códigos de elementos finitos disponibles. Como se comentó en 4.3 el sistema de ecuaciones a resolver está compuesto de seis incógnitas tensoriales y tres incógnitas escalares para las que contamos con seis ecuaciones tensoriales y tres ecuaciones escalares. El problema que plantean J. Lemaitre y R. Desmorat en (32) es similar al planteado en 4.3 con la excepción de que no consideran la disipación de energía y su transformación en calor por lo que la temperatura no es una incógnita del problema. Para resolver este problema, J. Lemaitre y R. Desmorat (32) reducen el problema a resolver inicialmente un sistema de 3 ecuaciones tensoriales y una ecuación escalar para determinar 3 incógnitas tensoriales (deformación elástica  $\bar{\epsilon}^e$ , la variable asociada al endurecimiento cinemático  $\bar{\alpha}$  y el daño  $\bar{D}$  que incluso para el caso isótropo es modelado como un tensor de segundo orden) y una incógnita escalar (la variable asociada al endurecimiento isótropo  $r$ ). Una vez determinadas estas incógnitas es inmediato resolver las restantes incógnitas. La resolución de tal sistema requiere el cálculo de una matriz Jacobiana de dimensión 28x28 y su correspondiente inversa, ambas para cada ciclo de iteración hasta lograr la convergencia y para cada incremento de tiempo. Resolver tal sistema de ecuaciones no lineales es, desde un punto de vista de tiempo de cálculo, bastante costoso.

Contrariamente al esquema sugerido por J. Lemaitre y R. Desmorat, en lugar de proponer un procedimiento de resolución incluyendo todas las variables tensoriales y escalares, en esta Tesis Doctoral se aprovecha la simplicidad del modelo de daño isótropo para reducir el problema a

#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

resolver un sistema de tres ecuaciones escalares con tres incógnitas escalares como se muestra en lo siguiente. Si la hipótesis de problema adiabático no es válida, el flujo de calor y el campo de temperatura deben ser calculados por el código de elementos finitos y el problema se reduce a un sistema de dos ecuaciones escalares con dos incógnitas también escalares. A partir de esas variables escalares se resuelven de manera inmediata el resto de incógnitas.

Haciendo algunas operaciones algebraicas sencillas se llega a la expresión:

$$\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon} - \alpha \dot{T} \bar{1} - \dot{\epsilon}^p \quad (4.33)$$

$$\dot{\sigma} = C : (\dot{\epsilon} - \alpha \dot{T} \bar{1} - \dot{\epsilon}^p) \quad (4.34)$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{\epsilon}^p$  4.28 es un tensor desviador y la definición del tensor elástico isótropo lineal  $C$  3.16 se tiene:

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^e - 3K\alpha\dot{T}\bar{1} - 2G\dot{\epsilon}^p \quad (4.35)$$

Donde  $\dot{\sigma}^e = C : \dot{\epsilon}$ . La parte desviadora de  $\dot{\sigma}$  es:

$$\dot{\sigma}^D = \dot{\sigma}^{eD} - 2G\dot{\epsilon}^p \quad (4.36)$$

Dado que  $\bar{\sigma}_b$  es desviador, a partir de 4.28, 4.30 y 4.36 obtenemos:

$$(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_b)^D = \dot{\sigma}^{eD} - (2G + C_\alpha(1 - D))\dot{p} \frac{3(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{2(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}} + 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D)\dot{p}\bar{\sigma}_b \quad (4.37)$$

Para la integración numérica del problema plantearemos un modelo numérico basado en un Euler implícito adaptado a las restricciones de la subrutina VUMAT de Abaqus. M. Ortiz y E.P. Popov (40) estudiaron algoritmos de integración generalizando los métodos trapezoidales y del punto medio y encontraron en particular que el esquema de Euler implícito ofrece estabilidad incondicional y una buena precisión. Con el fin de integrar estas ecuaciones en el tiempo, nos hemos basado en la metodología general del predictor elástico/corrector de plástico- (algoritmo de retorno radial), basado en el esquema Euler implícito, extendiendo su uso para acoplar las ecuaciones de evolución del daño, el endurecimiento cinemático y la temperatura.

Algunas variables intermedias y expresiones que se usan a lo largo de los siguientes desarrollos se encuentran en el Apéndice B. En lo siguiente usaremos los subíndices  $n$  y  $n + 1$  para hacer referencia a los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$  respectivamente. Asumiremos que la magnitud

$\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}$  es un dato de entrada al problema numérico y actuará como un parámetro del algoritmo numérico propuesto.

Integrando 4.30 entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  obtenemos:

$$\bar{\sigma}_{b_{n+1}} = \bar{\sigma}_{b_n} + C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \left[ \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} - 2C_{\sigma_b}\bar{\sigma}_{b_{n+1}} \right] \quad (4.38)$$

De donde podemos extraer  $\bar{\sigma}_{b_{n+1}}$ :

$$\bar{\sigma}_{b_{n+1}} = \frac{\bar{\sigma}_{b_n} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}}}{B_{n+1}} \quad (4.39)$$

Donde  $B_{n+1}$  está definido en B.7. Integrando 4.37 entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D = \\ (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_n^D + \Delta\tilde{\sigma}_{n+1}^\epsilon{}^D - (2G + C_\alpha(1 - D_{n+1}))\Delta p_{n+1} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} + \\ 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \bar{\sigma}_{b_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sustituyendo en 4.40 la expresión de  $\bar{\sigma}_{b_{n+1}}$  obtenida en 4.39 llegamos a:

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D = \\ (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_n^D + C : \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^D - (2G + C_\alpha(1 - D_{n+1}))\Delta p_{n+1} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} + \\ \bar{\sigma}_{b_n} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \\ 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \frac{\bar{\sigma}_{b_n} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}}}{B_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Haciendo algunas operaciones algebraicas <sup>1</sup> podemos extraer  $(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D$  como:

$$(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D = \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} \bar{\Sigma}_{n+1}}{((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} + 3G\Delta p_{n+1} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}})} \quad (4.42)$$

Donde  $\bar{\Sigma}_{n+1}$  está definido en B.8. La ecuación 4.42 muestra claramente la proporcionalidad entre  $(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D$  y  $\bar{\Sigma}_{n+1}$  y por tanto se puede establecer la relación 4.43:

$$\frac{\bar{\Sigma}_{n+1}}{\bar{\Sigma}_{eq_{n+1}}} = \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \quad (4.43)$$

---

<sup>1</sup>ver D.19 a D.22 para más detalles



#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

Donde  $\Sigma_{eq_{n+1}}$  se define en B.9. Por último podemos calcular  $(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}$  a partir de 4.42 como:

$$(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} = \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} + 3G\Delta p_{n+1} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}}} \Sigma_{eq_{n+1}} \quad (4.44)$$

Y extraer  $(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}$  como una función de las incógnitas  $\Delta p_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$  y el parámetro de entrada  $\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}$ :

$$(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} = \Sigma_{eq_{n+1}} - 3G\Delta p_{n+1} - \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}} \quad (4.45)$$

Introduciendo la expresión 4.45 en la función de plastificación 4.29 y asumiendo las siguientes aproximaciones:

$$\dot{p}_{n+1} = \frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta t_{n+1}} \quad (4.46)$$

$$p_{n+1} = p_n + \Delta p_{n+1} \quad (4.47)$$

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T_{n+1} \quad (4.48)$$

obtenemos:

$$f_{n+1} = \Sigma_{eq_{n+1}} - 3G\Delta p_{n+1} - \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}} - R(p_n + \Delta p_{n+1}, \frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta t_{n+1}}, T_n + \Delta T_{n+1}, \dots) = 0 \quad (4.49)$$

Donde se puede comprobar que la expresión 4.49 es una función de  $\Delta p_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\Delta T_{n+1}$  y del parámetro de entrada  $\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}$ . Por otro lado, integrando 4.28 entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  y teniendo en cuenta 4.43 obtenemos:

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p + \Delta p_{n+1} \frac{3}{2} \bar{\Omega}_{n+1} \quad (4.50)$$

Donde  $\bar{\Omega}_{n+1}$  se define en B.10. Integrando 4.33 entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  y teniendo en cuenta 4.50 obtenemos:

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^e = \bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \alpha \Delta T_{n+1} \bar{1} - \Delta p_{n+1} \frac{3}{2} \bar{\Omega}_{n+1} \quad (4.51)$$

Donde  $\bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial}$  se define en B.1. Por otro lado las expresiones para  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  y  $\bar{\sigma}_{n+1}$  se pueden deducir a partir de 4.35 y 4.27 respectivamente:

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} - 3K\alpha\Delta T_{n+1}\bar{1} - 2G\Delta p_{n+1}\frac{3}{2}\bar{\Omega}_{n+1} \quad (4.52)$$

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \tilde{\sigma}_{n+1}(1 - D_{n+1}) \quad (4.53)$$

Donde  $\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial}$  está definido en B.2.

A partir de las expresiones 4.51, 4.52 y teniendo en cuenta que  $\bar{\Omega}_{n+1}$  es un tensor desviador junto con la definición del tensor elástico isótropo lineal  $C$  3.16 nos permite calcular  $Y_{n+1} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_{n+1} : \bar{\epsilon}_{n+1}^e$ <sup>1</sup> como:

$$Y_{n+1} = Y_{n+1}^{trial} - 6K\alpha\Delta T_{n+1}tr(\bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial}) + K(3\alpha\Delta T_{n+1})^2 + 3G\Delta p_{n+1}^2 - \Delta p_{n+1}\Lambda_{n+1} \quad (4.54)$$

Donde  $Y_{n+1}^{trial}$  se ha definido en B.6 y  $\Lambda_{n+1}$  se define en B.11. La expresión 4.54 muestra que  $Y_{n+1}$  es una función de  $\Delta p_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\Delta T_{n+1}$  y del parámetro de entrada  $\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}$ .

Integrando 4.31 entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  obtenemos:

$$D_{n+1} = D_n + \Delta p_{n+1}\left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D} \quad (4.55)$$

Por lo tanto la expresión 4.55 es una función de  $\Delta p_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\Delta T_{n+1}$  y el parámetro de entrada  $\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}$ . Con respecto a la evolución de la temperatura, integrando 4.32 entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n+1}$  y teniendo en cuenta 4.52<sup>2</sup> obtenemos:

$$c_v\Delta T_{n+1}\rho_{n+1} = \eta_{QT}\Delta p_{n+1}\left[(1 - D_{n+1})\left(\frac{\Lambda_{n+1}}{2} - 3G\Delta p_{n+1}\right) + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}}\right] \quad (4.56)$$

Para un cálculo adecuado de  $\rho_{n+1}$ , seguimos lo establecido por R. Zaera y J. Fernández-Sáez (58) y por tanto:

$$\rho_{n+1} \approx \frac{\rho_0}{det(\bar{F}_{n+1})} \approx \frac{\rho_0}{1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1})} \quad (4.57)$$

---

<sup>1</sup>ver D.26 para más detalles

<sup>2</sup>ver D.27 y D.28 para más detalles

#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

Donde  $\bar{F}_{n+1}$  es el tensor del gradiente de deformación en el instante  $t_{n+1}$ . A partir de la ecuación 4.56 tenemos:

$$\Delta T_{n+1} = \frac{\eta_{QT} \Delta p_{n+1} (1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} \left[ (1 - D_{n+1}) \left( \frac{\Lambda_{n+1}}{2} - 3G \Delta p_{n+1} \right) + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right] \quad (4.58)$$

A partir del desarrollo anterior podemos obtener un sistema de tres ecuaciones escalares 4.49, 4.55 y 4.58 con tres incógnitas escalares  $D_{n+1}$ ,  $\Delta p_{n+1}$  y  $\Delta T_{n+1}$ , donde debe tenerse en cuenta que las variables intermedias  $B_{n+1}$  B.7,  $Y_{n+1}^{trial}$  B.6,  $Y_{n+1}$  4.54,  $\Sigma_{eq_{n+1}}$  B.9 y  $\bar{\Lambda}_{n+1}$  B.11 son todas ellas dependientes de dichas incógnitas. Este conjunto de ecuaciones constituye un sistema de ecuaciones no lineal que requiere un procedimiento de resolución iterativa en cada paso de tiempo. El procedimiento iterativo que seguimos en esta Tesis Doctoral esta basado en el método de Newton-Raphson. De acuerdo a este método, definiremos un vector residual:

$$\bar{\mathcal{R}}_{ad} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_f \\ \mathcal{R}_D \\ \mathcal{R}_T \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

donde:

$$\mathcal{R}_f = \Sigma_{eq_{n+1}} - 3G \Delta p_{n+1} - \frac{3C_\alpha (1 - D_{n+1}) \Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}} - R(p_n + \Delta p_{n+1}, \frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta t_{n+1}}, T_n + \Delta T_{n+1}, \dots) \quad (4.60)$$

$$\mathcal{R}_D = \begin{cases} D_{n+1} - D_n - \Delta p_{n+1} \left( \frac{Y_{n+1}}{S} \right)^{\beta_D} & \text{if } p_n \geq p_D \\ D_{n+1} - D_n - \Delta p_{n+1}^* \left( \frac{Y_{n+1}}{S} \right)^{\beta_D} & \text{if } p_n < p_D < p_{n+1} \\ 0 & \text{if } p_{n+1} < p_D \end{cases} \quad (4.61)$$

$$\mathcal{R}_T = \Delta T_{n+1} - \frac{\eta_{QT} \Delta p_{n+1} (1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} (1 - D_{n+1}) \left( \frac{\Lambda_{n+1}}{2} - 3G \Delta p_{n+1} \right) + \begin{cases} \frac{\eta_{QT} \Delta p_{n+1} (1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} & \text{if } p_n \geq p_D \\ \frac{\eta_{QT} \Delta p_{n+1}^* (1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} & \text{if } p_n < p_D < p_{n+1} \\ 0 & \text{if } p_{n+1} < p_D \end{cases} \quad (4.62)$$

donde  $\Delta p_{n+1}^* = p_n + \Delta p_{n+1} - p_D$ .

Llevar a cabo la integración a lo largo del tiempo de este sistema de ecuaciones no lineal equivale a alcanzar la convergencia local definida por  $\|\bar{\mathcal{R}}\| < error \text{ admisible}$  para un incremento

dato de la deformación  $\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}$  a través de la corrección de las tres incógnitas  $D_{n+1}$ ,  $\Delta p_{n+1}$  y  $\Delta T_{n+1}$ . Siguiendo el método de Newton-Raphson, es necesario linealizar el sistema de ecuaciones y en consecuencia calcular la siguiente matriz Jacobiana 4.63, donde los superíndices  $k+1$  y  $k$  se refieren al número de iteración:

$$J_{ad}^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta p}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial D}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta T}\right)_{n+1}^k \\ \left(\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Delta p}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial D}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Delta T}\right)_{n+1}^k \\ \left(\frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta p}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial D}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta T}\right)_{n+1}^k \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Este procedimiento permite linealizar el sistema como se muestra en 4.64:

$$\bar{\mathcal{R}}_{ad}^{k+1} = \bar{\mathcal{R}}_{ad}^k + J_{ad}^k \begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^{k+1} - \Delta p_{n+1}^k \\ D_{n+1}^{k+1} - D_{n+1}^k \\ \Delta T_{n+1}^{k+1} - \Delta T_{n+1}^k \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{0}} \quad (4.64)$$

Y calcular los valores de las tres incógnitas en la iteración  $k+1$  como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^{k+1} \\ D_{n+1}^{k+1} \\ \Delta T_{n+1}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^k \\ D_{n+1}^k \\ \Delta T_{n+1}^k \end{Bmatrix} - \left(J_{ad}^k\right)^{-1} \bar{\mathcal{R}}_{ad}^k \quad (4.65)$$

En aquellos casos en los que la transferencia de calor es relevante y por tanto la suposición de comportamiento adiabático no sea válida, la temperatura y el incremento de temperatura ( $\Delta T_{n+1}$ ) suelen ser calculados por los códigos de elementos finitos y por tanto el sistema de ecuaciones se reduce a dos ecuaciones escalares 4.49 y 4.55 con dos incógnitas escalares ( $D_{n+1}$ ,  $\Delta p_{n+1}$ ). En consecuencia, la matriz Jacobiana para el caso no adiabático se reduce a 4.66:

$$J_{n-ad}^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta p}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial D}\right)_{n+1}^k \\ \left(\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Delta p}\right)_{n+1}^k & \left(\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial D}\right)_{n+1}^k \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Y el valor de las dos incógnitas en la iteración  $k+1$  se calcula como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^{k+1} \\ D_{n+1}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^k \\ D_{n+1}^k \end{Bmatrix} - \left(J_{n-ad}^k\right)^{-1} \bar{\mathcal{R}}_{n-ad}^k \quad (4.67)$$

donde:

$$\bar{\mathcal{R}}_{n-ad} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_f \\ \mathcal{R}_D \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

La matriz Jacobiana definida previamente en 4.63 corresponde al caso general en el que ya ha aparecido el daño ( $p_{n+1}^k > p_D$ ), en caso contrario la matriz Jacobiana se simplifica como sigue

## 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

4.69:

$$J_{ad-nD}^k = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta p} \right)_{n+1}^k & \left( \frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta T} \right)_{n+1}^k \\ \left( \frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta p} \right)_{n+1}^k & \left( \frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta T} \right)_{n+1}^k \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Y el valor de las dos incógnitas en la iteración  $k + 1$  se calcula como :

$$\begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^{k+1} \\ \Delta T_{n+1}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta p_{n+1}^k \\ \Delta T_{n+1}^k \end{Bmatrix} - \left( J_{ad-nD}^k \right)^{-1} \bar{\mathcal{R}}_{ad-nD}^k \quad (4.70)$$

donde:

$$\bar{\mathcal{R}}_{ad-nD} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_f \\ \mathcal{R}_T \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

o para el caso de condiciones no adiabáticas y sin la aparición todavía de daño, la matriz Jacobiana se reduce a un único término:

$$J_{n-ad-nD}^k = \left( \frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta p} \right)_{n+1}^k \quad (4.72)$$

Con lo que el valor de la única incógnita  $\Delta p_{n+1}$  para la iteración  $k + 1$  se calcula como:

$$\Delta p_{n+1}^{k+1} = \Delta p_{n+1}^k - \frac{1}{J_{n-ad-nD}^k} \mathcal{R}_{f_{n+1}}^k \quad (4.73)$$

Las expresiones para los distintos términos de la matriz Jacobiana pueden encontrarse en el Apéndice C Matriz Jacobiana.

### 4.5. Particularización para el modelo de Johnson-Cook

Como puede verse en el desarrollo anterior, el algoritmo numérico es válido para una amplia gama de posibles funciones de plastificación, siendo la única restricción que se pueda expresar como se muestra en 2.5 como es el caso de todas las mostradas en la tabla 3.2. Con el fin de incluir en un código de elementos finitos el algoritmo numérico que se desarrolló anteriormente es necesario escoger una función de plastificación. En esta Tesis Doctoral hemos elegido el modelo propuesto por G.R. Johnson y W. H. Cook en 1983 (25) que se describe en 3.4.2.2.1. Hay relaciones de endurecimiento más sofisticadas, pero la propuesta por Johnson y Cook es probablemente la más ampliamente documentada entre aquellas que tienen en cuenta la deformación plástica, la velocidad de deformación plástica y efectos de la temperatura. Se han hecho numerosos esfuerzos en el pasado para determinar los valores de los parámetros para un gran número de materiales metálicos y es por ello que nos permite realizar simulaciones numéricas

basadas en parámetros realistas. La expresión de la función de plastificación se encuentra en 3.35. Conforme a la discretización numérica seguida en esta Tesis Doctoral se tiene:

$$R_{JC_{n+1}} = \quad (4.74)$$

$$\begin{cases} [A_{JC} + B_{JC}(p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}}][1 + C_{JC} \ln(\frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta t_{n+1} \dot{p}_0})] & \text{if } \dot{p} > \dot{p}_0 \\ [A_{JC} + B_{JC}(p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}}][1 - \theta_{n+1}^{m_{JC}}] & \text{if } \dot{p} < \dot{p}_0 \end{cases} \quad (4.75)$$

donde  $\theta_{n+1}$  lo hemos definido como:

$$\theta_{n+1} = \frac{(T_n + \Delta T_{n+1} - T_r)}{(T_m - T_r)} \quad (4.76)$$

Esto permite calcular  $R_{\Delta p_{n+1}}$  y  $R_{\Delta T_{n+1}}$  e introducirlos dentro de los términos de la Matriz Jacobiana referenciados en C.1 y C.3 respectivamente:

$$R_{\Delta p_{n+1}} = \begin{cases} \left( B_{JC} n_{JC} (p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}-1} [1 + C_{JC} \ln(\frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta t_{n+1} \dot{p}_0})] + \right. & \text{if } \dot{p} > \dot{p}_0 \\ \left. [A_{JC} + B_{JC}(p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}}] \frac{C_{JC} \Delta t_{n+1}}{\Delta p_{n+1}} \right) [1 - \theta_{n+1}^{m_{JC}}] & \\ B_{JC} n_{JC} (p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}-1} [1 - \theta_{n+1}^{m_{JC}}] & \text{if } \dot{p} < \dot{p}_0 \end{cases} \quad (4.77)$$

$$R_{\Delta T_{n+1}} = \begin{cases} -[A_{JC} + B_{JC}(p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}}][1 + C_{JC} \ln(\frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta t_{n+1} \dot{p}_0})] & \\ m_{JC} \frac{\theta_{n+1}^{m_{JC}-1}}{(T_m - T_r)} & \text{if } \dot{p} > \dot{p}_0 \\ -[A_{JC} + B_{JC}(p_n + \Delta p_{n+1})^{n_{JC}}] m_{JC} \frac{\theta_{n+1}^{m_{JC}-1}}{(T_m - T_r)} & \text{if } \dot{p} < \dot{p}_0 \end{cases} \quad (4.78)$$

### 4.5.1. Operador Tangente Consistente

Como se comentó anteriormente emplearemos el código de elementos finitos ABAQUS. Este código ofrece dos versiones ABAQUS/Explicit y ABAQUS/Standard. ABAQUS/Explicit integra las ecuaciones dinámicas de equilibrio siguiendo un esquema de integración basado en un Euler explícito (forward Euler) en el que las incógnitas del problema (valores en el instante  $t_{n+1}$ ) se obtienen de manera explícita a partir de valores ya conocidos (valores en el instante  $t_n$ ). ABAQUS/Explicit está recomendado para analizar los siguientes tipos de problemas:

- Análisis de problemas dinámicos a alta velocidad (corta duración)

## 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

- Análisis de problemas cuasi-estáticos no lineales
- Análisis de problemas con discontinuidades o inestabilidades como el pandeo o el colapso de estructuras
- Análisis de problemas dinámicos con acoplamiento de temperaturas y desplazamientos, etc.

Por su parte, ABAQUS/Standard está recomendado para analizar los siguientes tipos de problemas:

- Análisis de problemas estáticos lineales y no lineales
- Análisis de problemas dinámicos lineales
- Análisis de problemas dinámicos no lineales de baja velocidad (respuesta de baja frecuencia)
- Análisis de problemas cuasi-estáticos con acoplamiento de temperaturas y desplazamientos.
- Análisis de transferencia de calor no lineal, etc.

Según el fabricante, ABAQUS/Standard no está recomendado para el análisis de problemas en los que se esperan encontrar discontinuidades significativas en la solución como es el caso de los problemas de impacto o corte. Por ello, para el análisis del problema de impacto con el que queremos validar el algoritmo de integración propuesto emplearemos ABAQUS/Explicit y la subrutina VUMAT.

No obstante, para otros tipos de problemas puede estar recomendado el uso de ABAQUS/Standard y la subrutina UMAT en cuyo caso es necesario calcular el Operador Tangente Consistente por lo que a continuación mostraremos su deducción si bien no ha sido ni implementado ni validado.

Para la solución numérica de problemas en medios continuos usando el método de Newton-Raphson en ecuaciones de equilibrio global es necesario calcular en cada punto de integración el módulo tangente. Para alcanzar la convergencia parabólica del método Newton-Raphson es conveniente usar el algoritmo denominado Operador Tangente Consistente con el esquema de integración numérico. El valor del Operador Tangente Consistente depende del algoritmo usado para la integración de las ecuaciones constitutivas y es, habitualmente, diferente del llamado

módulo tangente elastoplástico.

En el modelado numérico de la integración de las ecuaciones constitutivas, las inconsistencias entre los procedimientos numéricos globales y los locales son las causas principales de las ineficiencias computacionales y de las inestabilidades. La incorporación en la mecánica computacional del Operador Tangente Consistente (global) junto con el algoritmo de integración basado en el retorno radial (local) se ha mostrado que proporciona una convergencia de integración rápida, precisa y eficiente a la hora de establecer modelos numéricos para la integración de las ecuaciones constitutivas de los sólidos.

El siguiente desarrollo se centrará en el caso más general, esto es, asumiendo que se cumple la condición de problema adiabático y que el daño ya se ha iniciado, es decir que en cada paso de integración es necesario determinar las tres incógnitas del problema ( $D_{n+1}$ ,  $p_{n+1}$  y  $T_{n+1}$ ). El problema no adiabático y las etapas iniciales en las que la aparición del daño todavía no se ha iniciado, son casos simplificados del desarrollo que se muestra más abajo. Por simplicidad se omitirán las referencias al paso del tiempo en que nos encontramos (subíndice  $(*)_{n+1}$ ).

A continuación se muestra una expresión explícita del Operador Tangente Consistente. El objetivo es estimar como la solución encontrada se ve afectada por pequeñas perturbaciones en los parámetros de entrada, en nuestro caso debido a pequeñas perturbaciones del tensor de deformaciones ( $\delta\Delta\bar{\epsilon}$ ). Para lograr este objetivo, el primer paso es linealizar el tensor de tensiones alrededor del valor calculado del tensor de tensiones  $\tilde{\sigma}_0$ . Para ello se debe realizar una linealización de 4.52 permitiendo pequeños cambios ( $\delta\bar{v}^T = (\delta\Delta p, \delta D, \delta\Delta T)$ ) en las variables de la solución y pequeños cambios en los parámetros de entrada ( $\delta\Delta\bar{\epsilon}$ ).

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 + C : \left( \bar{I} - \Delta p \frac{3}{2} \frac{\partial(\bar{\Omega})}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} \right) : \delta\Delta\bar{\epsilon} - C : \left( \frac{3}{2} (\bar{\Omega} + \Delta p \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\Delta p}), \Delta p \frac{3}{2} \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial D}, \alpha \bar{I} \right) \delta\bar{v} \quad (4.79)$$

De una manera similar, el segundo paso es linealizar el vector de residuos alrededor de la solución calculada ( $\bar{v}^T = (\Delta p, D, \Delta T)$ ) tal y como se muestra aquí abajo:

$$\bar{\mathcal{R}}_{ad} = \bar{\mathcal{R}}_{ad0} + \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} : \delta\Delta\bar{\epsilon}^T + \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial\bar{v}} \delta\bar{v} \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial\bar{v}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_f}{\partial\bar{v}} \\ \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_D}{\partial\bar{v}} \\ \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_T}{\partial\bar{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_f}{\partial\Delta p} & \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_f}{\partial D} & \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_f}{\partial\Delta T} \\ \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_D}{\partial\Delta p} & \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_D}{\partial D} & \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_D}{\partial\Delta T} \\ \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_T}{\partial\Delta p} & \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_T}{\partial D} & \frac{\partial\bar{\mathcal{R}}_T}{\partial\Delta T} \end{Bmatrix} = J_{ad} \quad (4.81)$$



#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_f}{\partial \Delta \bar{\epsilon}}, \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_D}{\partial \Delta \bar{\epsilon}}, \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_T}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} \right) \quad (4.82)$$

donde  $\bar{\mathcal{R}}_{ad_0} = \bar{0}$  es el vector de residuos en la solución calculada. La solución del problema “perturbado” se alcanza cuando  $\bar{\mathcal{R}}_{ad} = \bar{0}$  y por tanto las variables de la solución “perturbada” están relacionadas con las variables de entrada como se indica a continuación:

$$\delta \bar{v} = - \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial \bar{v}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} : \delta \Delta \bar{\epsilon} \right) = - \left( J_{ad} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} : \delta \Delta \bar{\epsilon} \right) \quad (4.83)$$

Incluyendo en 4.79 la expresión obtenida en 4.83 llegamos a:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 + C : (\bar{I} - \Delta p \frac{3}{2} \bar{\Omega}_{,\Delta \bar{\epsilon}} + \bar{M}) : \delta \Delta \bar{\epsilon} \quad (4.84)$$

donde  $\bar{M}$  es un tensor de cuarto orden resultante de la multiplicación de :

$$\bar{M} = \left( \frac{3}{2} (\bar{\Omega} + \Delta p \bar{\Omega}_{,\Delta p}), \Delta p \frac{3}{2} \bar{\Omega}_{,D}, \alpha \bar{I} \right) \left( J_{ad} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_f}{\partial \Delta \bar{\epsilon}}, \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_D}{\partial \Delta \bar{\epsilon}}, \frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_T}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} \right) \quad (4.85)$$

Por tanto, el Operador Tangente Consistente puede ser expresado como:

$$\bar{M}_{OTC} = C : (\bar{I} - \Delta p \frac{3}{2} \bar{\Omega}_{,\Delta \bar{\epsilon}} + \bar{M}) \quad (4.86)$$

La expresión de los tensores de segundo orden correspondientes a cada término de  $\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_{ad}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}}$  son:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_f}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial (\Sigma_{eq} - 3G\Delta p - \frac{3C_\alpha(1-D)\Delta p}{2B} - R(p, \frac{\Delta p}{\Delta t}, T, \dots))}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \Sigma_{eq,\Delta \bar{\epsilon}} \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_D}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \begin{cases} -\frac{\beta_D \Delta p}{S} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D - 1} Y_{,\Delta \bar{\epsilon}} & \text{if } p_n \geq p_D \\ -\frac{\beta_D \Delta p^*}{S} \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D - 1} Y_{,\Delta \bar{\epsilon}} & \text{if } p_n < p_D < p_{n+1} \\ \bar{0} & \text{if } p < p_D \end{cases} \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{R}}_T}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = -\frac{\eta_{QT} \Delta p (1 + tr(\bar{\epsilon}))}{c_v \rho_0} \left[ (1-D) \left( \frac{\Lambda_{,\Delta \bar{\epsilon}}}{2} \right) + (\beta_D + 1) \left( \frac{Y}{S} \right)^{\beta_D} Y_{,\Delta \bar{\epsilon}} \right] - \frac{\eta_{QT} \Delta p}{c_v \rho_0} \left[ (1-D) \left( \frac{\Lambda}{2} - 3G\Delta p \right) + \frac{Y^{\beta_D + 1}}{S^{\beta_D}} \right] \bar{I} \quad {}^1 \quad (4.89)$$

---

<sup>1</sup>ver D.38 para más detalles

Para clarificar la definición de  $\bar{M}$  4.85, los términos resultantes de la multiplicación de matrices expresados según la notación de índices son:

$$M_{ijkl} = P_{ijm} J_{admn}^{-1} \partial \mathcal{R}_{nkl} \quad (4.90)$$

donde:

$$P_{ij1} = \frac{3}{2} (\bar{\Omega} + \Delta p \bar{\Omega}_{,\Delta p})_{ij} \quad (4.91)$$

$$P_{ij2} = \Delta p \frac{3}{2} (\bar{\Omega}_{,D})_{ij} \quad (4.92)$$

$$P_{ij3} = \alpha \delta_{ij} \quad (4.93)$$

$$\partial \mathcal{R}_{1kl} = \left( \frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} \right)_{kl} \quad (4.94)$$

$$\partial \mathcal{R}_{2kl} = \left( \frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} \right)_{kl} \quad (4.95)$$

$$\partial \mathcal{R}_{3kl} = \left( \frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} \right)_{kl} \quad (4.96)$$

## 4.6. Adimensionalización de las Ecuaciones

Como puede verse a partir de las secciones anteriores, el vector residual se compone de tres componentes cada uno de ellos haciendo referencia a diferentes magnitudes físicas (tensión, daño y temperatura) y cada una con un orden de magnitud diferente. La primera proviene de la función de plastificación ( $\mathcal{R}_f$ ) cuyas dimensiones y orden de magnitud de una aleación de metal común son el Giga Pascal ( $10^9 Pa$ ). La segunda proviene de la evolución del daño de ( $\mathcal{R}_D$ ) que es adimensional y cuyo orden de magnitud es la unidad. La tercera proviene de la evolución de la temperatura ( $\mathcal{R}_T$ ) cuyas dimensiones y orden de magnitud de una aleación de metal común son cientos de grados centígrados ( $10^2 ^\circ C$ ).

## 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

Este hecho requiere un análisis adecuado que convierta fácilmente el vector residual y todas las ecuaciones necesarias para el procedimiento de resolución en un sistema de ecuaciones adimensional y cuyo orden de magnitud sea la unidad. De este modo se reducirán los errores numéricos derivados de las operaciones matemáticas entre términos de orden de magnitud dispar. Esto se puede lograr a través de un cambio apropiado en los parámetros y constantes empleadas para definir las ecuaciones constitutivas. Teniendo en cuenta que los términos de  $(\mathcal{R}_f)$  cuando se alcanzan las condiciones de deformación plástica son del orden de magnitud de  $A_{JC}$  y los cambios esperados de temperatura son del orden de magnitud que  $T_m - T_r$ , estas magnitudes son válidas para una transformación adimensional adecuada del sistema de ecuaciones. Por lo tanto, sustituyendo en las expresiones anteriores los parámetros y las constantes de los materiales por los correspondientes adimensionales ( $*_{dl}$ ) tal como se expresan a continuación, permitirá obtener un sistema de ecuaciones adimensional y cuyo orden de magnitud es la unidad:

$$\begin{aligned}
 K_{dl} &= \frac{K}{A_{JC}} & G_{dl} &= \frac{G}{A_{JC}} & \lambda_{Ldl} &= \frac{\lambda_L}{A_{JC}} \\
 C_{\alpha_{dl}} &= \frac{C_{\alpha}}{A_{JC}} & C_{\sigma_{bdl}} &= C_{\sigma_b} A_{JC} \\
 A_{JC_{dl}} &= \frac{A_{JC}}{A_{JC}} = 1 & B_{JC_{dl}} &= \frac{B_{JC}}{A_{JC}} \\
 S_{dl} &= \frac{S}{A_{JC}} & \alpha_{dl} &= \alpha(T_m - T_r) \\
 T_{m_{dl}} &= \frac{T_m}{T_m - T_r} & T_{r_{dl}} &= \frac{T_r}{T_m - T_r} & T_{0_{dl}} &= \frac{T_0}{T_m - T_r} \\
 c_{v_{dl}} &= \frac{c_v \rho_0 (T_m - T_r)}{A_{JC}} & \rho_{0_{dl}} &= \frac{\rho_0}{\rho_0} = 1
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

### 4.7. Procedimiento de Resolución

La resolución del sistema de ecuaciones presenta dos ramas en dos ecuaciones. La primera ecuación que presenta una rama está relacionada con la evolución del daño y está condicionada a alcanzar la deformación plástica acumulada el valor umbral  $p_D$  tal como se expresa en 4.31. La segunda ecuación que muestra una rama está relacionada con el endurecimiento isotrópo cuando se utiliza la relación de Johnson-Cook como función de plastificación. Las diferentes expresiones de la función de endurecimiento y de evolución del daño conducen a una discontinuidad en sus derivadas y en la propia función de plastificación  $f$ , que tiene que ser considerado cuidadosamente para una correcta implementación en un código de elementos finitos.

Como se ha señalado anteriormente, nos hemos basado en la metodología general del predictor elástico/corrector plástico (algoritmo de retorno radial) basado en un Euler implícito como esquema numérico en el que se ha extendido su uso para acoplar las ecuaciones de evolución del

daño, el endurecimiento cinemático y la temperatura. A continuación se resumen los pasos para lograr una correcta implementación en un código de elementos finitos:

- PASO 0. Inicializar. Solo al comienzo del primer paso de tiempo.
- PASO 0.1. Calcular las magnitudes adimensionales indicadas en 4.97. Estos parámetros adimensionales serán empleados en lugar de los parámetros con dimensiones a lo largo de todo el código. Esto solo se debe realizar una vez.
- PASO 0.2. Inicializar las variables para todos los elementos finitos.  $\bar{\epsilon}_0^e = \bar{0}$ ,  $\bar{\sigma}_0 = \bar{0}$ ,  $T_0 = T_r$ ,  $\bar{\sigma}_0 = \bar{0}$ ,  $\bar{\sigma}_{b_0} = \bar{0}$ ,  $p_0 = 0$ ,  $D_0 = 0$ , etc.
- PASO 1. Predictor Elástico. Comprobar la condición de deformación elástica o plástica. Suponiendo  $p_{n+1} = p_n$ ,  $\Delta p_{n+1} = 0$ ,  $D_{n+1} = D_n$ ,  $\Delta T_{n+1} = 0$  y  $T_{n+1} = T_n$ , entonces se calcula:  
B.1, B.2, B.3, B.4, B.5, B.6, B.7, B.9, 4.75 y 4.60.  
Si  $\mathcal{R}_f \leq 0$  entonces la predicción de estado de deformación elástico es correcta. Ir al PASO 3.0. Si  $\mathcal{R}_f > 0$  entonces la predicción de estado de deformación elástico es incorrecta, se han alcanzado la condición de deformación plástica y por tanto se debe comenzar con el proceso iterativo.
- PASO 2. Corrector Plástico. Proceso iterativo.
- PASO 2.0.1. Como conjunto inicial de valores estimados de las incógnitas se asignarán a  $\bar{v}^T = (\Delta p, D, \Delta T) = (0, D_n, 0)^T$
- PASO 2.1. Dependiendo de la validez de la suposición de problema adiabático y en función de la rama aplicable ( $p_{n+1}$  respecto  $p_D$  para el daño o  $p_{n+1}$  respecto a  $p_0 \Delta t_{n+1}$  para la función de plastificación de Johnson-Cook) a la iteración en cursos, calcular según aplicabilidad:  
B.7, B.9, B.11, B.12, B.13, 4.54, 4.75, 4.60, 4.61 y 4.62
- PASO 2.2. Comprobar el error admisible. Construir el vector de residuos y calcular su módulo, esto es el error actual:  
 $error = \|4,64\|$  o  $error = \|4,68\|$  o  $error = \|4,60\|$  según aplique.  
Si  $error < Max \ Error \ Admisible$  ir al PASO 3.0, en caso contrario continuar con el PASO 2.3.

#### 4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA

---

- PASO 2.3. Calcular los términos de la Matriz Jacobiana. Calcular:  
B.14, B.15, B.16, 4.77, 4.78, C.1, C.2, C.3, C.4, C.5, C.6, C.7, C.8 y C.9
- PASO 2.4. Construir e invertir la Matriz Jacobiana aplicable en cada momento:  
4.63 o 4.66 o 4.69 o 4.72
- PASO 2.5. Calcular los nuevos valores para  $\Delta p_{n+1}$ ,  $D_{n+1}$  y  $\Delta T_{n+1}$  de acuerdo a:  
4.65 o 4.67 o 4.70 o 4.73  
y seguir con el PASO 2.1.
- PASO 3.0. Actualizar el tensor de tensiones y las variables de estado teniendo en cuenta la transformación de adimensionalización hecha y por lo tanto multiplicar la tensión y el endurecimiento cinemático por  $A_{JC}$  y la temperatura por  $(T_m - T_r)$ . Si  $D_{n+1} \geq D_c$  entonces eliminar el elemento. Igualmente si  $T_{n+1}$  se aproxima a la temperatura de fusión ( $T_m$ ) también se debe eliminar el elemento. Calcular:  
B.7, B.8, B.9, B.10, B.11, 4.52, 4.53, 4.39, 4.47, 4.48, 4.51 y opcionalmente 4.50.

## 5

# Ensayos de impacto sobre Ti 6Al-4V

En esta sección se describen las pruebas experimentales y los trabajos realizados para la calibración y validación de los parámetros del modelo de daño.

Asimismo para la evaluación, validación y comparación de los modelos de fallo descritos en el Capítulo 2.4 Criterios de Fallo se han realizado una serie de ensayos de impacto destinados a determinar la velocidad residual de un proyectil al impactar sobre una placa. Para ello se han realizado ensayos a diferentes velocidades de impacto determinándose en cada caso la velocidad residual con la que sale el proyectil. El ajuste de los parámetros de los diferentes modelos de fallo se ha realizado de forma que las simulaciones numéricas se aproximen a los resultados obtenidos experimentalmente. En esta sección se describen las propiedades que caracterizan al material objeto de ensayo y las pruebas y resultados experimentales que se han obtenido.

### 5.1. El Titanio y sus aleaciones

El titanio es el cuarto metal (tras el hierro, el aluminio y el magnesio) más abundante de la corteza terrestre con un 0,63 % en peso. Desde un primer momento, ha sido clasificado como metal ligero, a pesar de que su densidad de 4,51 g/cm<sup>3</sup> es casi el doble de la del aluminio.

Debido a su acusada afinidad por el oxígeno, el titanio se cubre de una finísima película de óxido a temperatura ambiente. Gracias a esta delgada película es resistente a la corrosión, tanto en ambientes salinos como en contacto con disoluciones ácidas. Esta característica la comparte con el aluminio, si bien la protección que proporciona la película protectora del titanio es muy superior. Tiene una elevada temperatura de fusión (1668 °C). Se caracteriza por poseer dos formas alotrópicas diferentes:

## 5. ENSAYOS DE IMPACTO SOBRE TI 6AL-4V

- **Fase  $\alpha$ :** hasta 882°C, con una estructura hexagonal compacta (HCP).
- **Fase  $\beta$ :** por encima de 882°C, experimenta una transformación alotrópica hacia una estructura cúbica centrada en el cuerpo (BCC) permaneciendo estable hasta el punto de fusión. La transformación anterior también permite la existencia conjunta de las dos fases,  $\alpha$  y  $\beta$ .

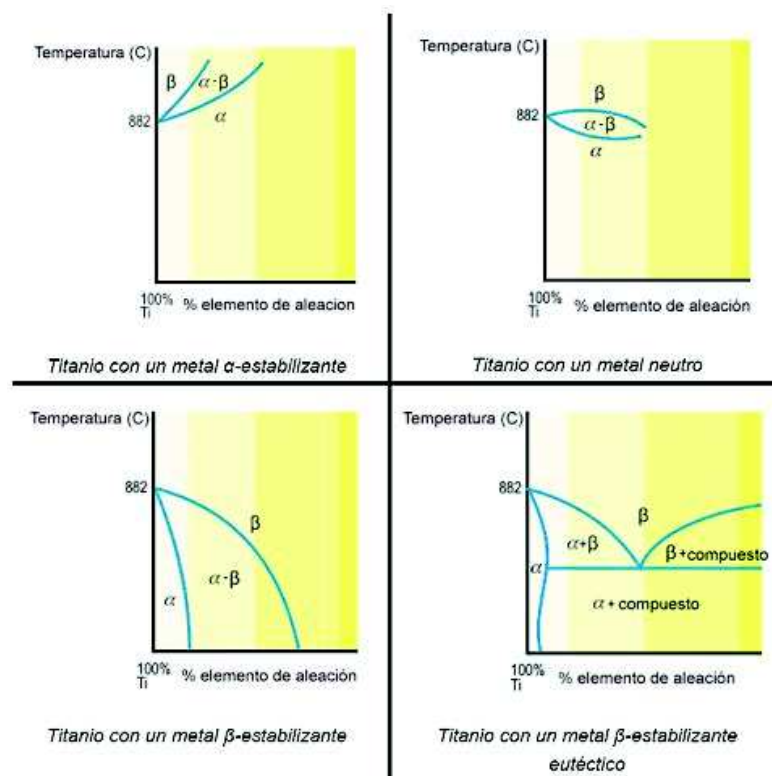


Figura 5.1: Diagramas de fase de las aleaciones de titanio

El titanio es el único metal ligero que presenta polimorfismo pasando de una estructura hexagonal compacta (fase  $\alpha$ ) a una microestructura cúbica centrada en el cuerpo (fase  $\beta$ ). En equilibrio, la estructura  $\beta$  es inestable a temperaturas menores a 882°C, descomponiéndose de nuevo a fase  $\alpha$ , al enfriar el titanio por debajo de la temperatura de transición. Esta transformación ofrece la posibilidad de obtener aleaciones con microestructura de tipo  $\alpha$ ,  $\beta$  o  $\alpha$ - $\beta$  dependiendo de los elementos aleantes que estabilizan una u otra fase.

El diferente comportamiento frente a la deformación de los dos tipos de redes permite disponer de un metal resistente y poco deformable a temperatura ambiente (fase  $\alpha$ ) y fácilmente deformable si, mediante un calentamiento, se obtiene la red cúbica (fase  $\beta$ ). Sin embargo, su baja

conductividad térmica (una sexta parte de la de los aceros) origina problemas de calentamientos locales, y dificulta los tratamientos térmicos.

Los elementos aleantes del titanio se pueden clasificar como, estabilizadores de la fase  $\alpha$ , de la fase  $\beta$ , o neutros. Los elementos estabilizadores de  $\alpha$  (Al, O, N, C, Ga), llevan la fase  $\alpha$  hasta altas temperaturas, mientras que los estabilizadores de la fase  $\beta$  (Mo, V, Ta, Nb, Fe, Mn, Cr, Co, Ni, Cu, H, W) llevan la fase  $\beta$  hacia bajas temperaturas. Los elementos Si, Sn y Zr son considerados como aleantes neutros.

La resistencia del titanio es relativamente baja, pero puede aumentarse, disminuyendo su plasticidad, diluyendo otros elementos en su red cristalina al presentar una gran facilidad para la formación de soluciones sólidas. Las propiedades mecánicas del titanio dependen de su pureza. El titanio puro es muy dúctil y su resistencia a la tracción es relativamente baja. Se puede elevar su resistencia, a expensas de disminuir su plasticidad, disolviendo otros elementos en la red del titanio. El oxígeno y el nitrógeno, cuando están disueltos en el titanio, proporcionan una mayor resistencia, lo que no ocurre cuando se hallan en forma de óxidos. El orden de magnitud de la solubilidad intersticial de estos elementos en el titanio es mayor que en otros metales, lo que hace que la influencia de estos elementos en las propiedades mecánicas sea notable. Por esto se definen varios grados de titanio comercialmente puro en función del contenido de estos elementos (oxígeno, hidrógeno, nitrógeno y carbono) que controlan su resistencia y fragilidad, y el hierro, que controla su resistencia a la corrosión.

Debido a su resistencia y baja densidad y a que puede aguantar temperaturas relativamente altas, las aleaciones de titanio se emplean en la industria aeronáutica para fabricar componentes del tren de aterrizaje, las puertas anti-incendios, los álabes del compresor y los revestimientos de los motores a reacción entre otras aplicaciones. También se puede encontrar en distintos productos deportivos, como palos de golf, raquetas de tenis, bicicletas, etc. Debido a su gran resistencia a la corrosión, se puede emplear en plantas desalinizadoras y en partes de barcos que están en contacto directo con el agua de mar como pueden ser las hélices. Además, el titanio y sus aleaciones presentan una excelente biocompatibilidad.

Las aleaciones de titanio se dividen en cuatro grandes grupos según sus características metalúrgicas básicas: aleaciones  $\alpha$ , aleaciones casi  $\alpha$ , aleaciones  $\alpha$ - $\beta$  y aleaciones  $\beta$ .



## 5. ENSAYOS DE IMPACTO SOBRE TI 6Al-4V

---

**Aleaciones  $\alpha$ :** Este grupo contiene elementos estabilizadores de la fase  $\alpha$ , a veces en combinación con elementos neutros, y por lo tanto tienen una microestructura similar a la de la fase  $\alpha$ . Una de tales aleaciones monofásica es el Ti-5Al-2.5Sn, que está disponible comercialmente. La aleación tiene excelentes propiedades de tracción y fluencia desde temperatura ambiente a temperaturas elevadas de hasta 300 °C. Las aleaciones  $\alpha$  se utilizan principalmente en aplicaciones que requieren una elevada resistencia a la corrosión y también en aplicaciones criogénicas.

**Aleaciones casi  $\alpha$ :** Estas aleaciones contienen mayoritariamente elementos estabilizadores de la fase  $\alpha$  y sólo contienen cantidades limitadas de elementos estabilizadores de la fase  $\beta$ . Se caracterizan por una microestructura que consiste mayoritariamente en la fase  $\alpha$  y conteniendo sólo pequeñas cantidades de fase  $\beta$ . Las aleaciones Ti-8Al-1Mo-IV y Ti-6Al-5Zr-0.5Mo-0.25Si son ejemplos de aleaciones casi  $\alpha$ . Su comportamiento es similar a la aleaciones  $\alpha$  pero son capaces de funcionar a mayores temperaturas de entre 400 °C y 520 °C.

**Aleaciones  $\alpha$ - $\beta$ :** Este grupo de aleaciones contiene adiciones de estabilizadores  $\alpha$  y  $\beta$  y posee microestructuras constituidas por mezclas de fase  $\alpha$  y fase  $\beta$ . Ti 6Al-4V y Ti-4Al-2Sn-4Mo-0.5Si son sus aleaciones más comunes. La fase  $\beta$ , puede ser estabilizada a temperatura ambiente mediante la adición de elementos estabilizantes de la fase  $\beta$  tales como V, Fe y Mn. Pueden ser tratados térmicamente para mejorar sus prestaciones y resistencia siendo especialmente apropiadas para aplicaciones de alta resistencia a temperaturas elevadas de entre 350 °C y 400 °C.

**Aleaciones  $\beta$ :** Estas aleaciones contienen cantidades significativas de elementos estabilizadores de la fase  $\beta$  y se caracterizan por una alta templabilidad, mejor forjabilidad, y conformabilidad en frío. Básicamente, estas aleaciones ofrecen una resistencia a temperatura ambiente equivalente a la de las aleaciones de  $\alpha$ - $\beta$ , pero sus propiedades a temperatura elevada son inferiores a las de las aleaciones  $\alpha$ - $\beta$ .

### 5.1.1. Propiedades físicas y mecánicas del Ti 6Al-4V

Las aleaciones de titanio se han estudiado ampliamente durante las últimas décadas debido a sus importantes aplicaciones tecnológicas. Su alta resistencia, baja densidad, resistencia a corrosión, buena formabilidad, soldabilidad y buena estabilidad metalúrgica impulsaron el uso de estas aleaciones en una amplia variedad de aplicaciones que van desde motores de aeronaves y

componentes estructurales a los implantes biomédicos.

Entre las aleaciones  $\alpha$ - $\beta$ , destaca la aleación Ti-6Al-4V (también conocida como grado 5, Ti6Al4V o Ti 6-4) es con mucho la aleación de titanio más popular y por lo tanto es estudiada en profundidad. Más del 50 % de todas las aleaciones de Titanio en uso hoy en día son de esta composición.

La aleación fue desarrollada a principios de 1950 en los Estados Unidos en el Instituto de Tecnología de Illinois y por lo tanto es una de las primeras aleaciones de titanio que se comercializaron considerándose hoy en día como un material de propósito general dentro de las aleaciones de titanio. De hecho, es considerada como la más polivalente de entre las aleaciones de titanio y está disponible en múltiples formas comerciales. Hay dos razones para el éxito del Ti-6Al-4V. En primer lugar, el buen equilibrio de sus propiedades, como se puede ver en la tabla 5.1. En segundo lugar, es de lejos la aleación de titanio más intensamente desarrollada y probada, lo que constituye una ventaja importante, especialmente en la industria aeroespacial que es el mayor usuario de Ti-6Al-4V.

Tiene una composición química de 6 % de aluminio, 4 % de vanadio, 0,25 % (máximo) de hierro, 0,2 % (máximo) de oxígeno, y el resto de titanio. También están normalmente presentes varios átomos de impurezas, tales como O, C, N, H. A temperatura ambiente, la fase  $\beta$  estabilizada contiene más del 4 % nominal de V, por encima de 527 °C, la fase  $\alpha$  se transforma en fase  $\beta$ , mientras que por encima de 980 °C toda la microestructura se compone de granos  $\beta$  equiaxiales. La tensión de plastificación de esta aleación es fuertemente dependiente de la temperatura y la velocidad de deformación. A temperaturas superiores a 527 °C, la tensión de plastificación disminuye fuertemente con la temperatura, mientras que aumenta la sensibilidad a la velocidad de deformación.

Es significativamente más resistente que el titanio comercial puro mientras que tiene la misma rigidez y propiedades térmicas (con la exclusión de la conductividad térmica, que es aproximadamente un 60 % menor en el Ti6Al4V que en el Ti comercial puro).

La aleación Ti 6Al-4V se utiliza actualmente en una amplia gama de aplicaciones de baja y alta temperatura, tales como los alabes y otros componentes para turbinas en aplicaciones de motores de aeronaves, alabes de turbina de vapor, componentes marinos, piezas estructurales

## 5. ENSAYOS DE IMPACTO SOBRE TI 6AL-4V

---

Propiedades Físicas	Valor
Densidad	4420 Kg/m <sup>3</sup>
Punto de fusión	1933 °K
Propiedades Mecánicas	
Dureza, Brinell	334
Dureza, Knoop	363
Dureza, Rockwell C	36
Dureza, Vickers	349
Tensión última en tracción	950 MPa
Tensión de plastificación en tracción	880 MPa
Alargamiento a rotura	14 %
Reducción de área	36 %
Modulo de elasticidad	113.8 GPa
Tensión de plastificación en compresión	970 MPa
Resistencia a la tracción con entalla	1450 MPa
Resistencia de carga última	1860 MPa
Coefficiente de Poisson	0.33
Propiedades Térmicas	
Coefficiente de dilatación 20°C	8.6 $\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$
Coefficiente de dilatación 250°C	9.2 $\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$
Coefficiente de dilatación 500°C	9.7 $\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$
Calor específico	560 J/Kg°K
Conductividad Térmica	6.7 W/m°K
$\beta$ Transus	980 °C

**Tabla 5.1: Propiedades de la aleación Ti-6Al-4V** - Principales propiedades físicas, mecánicas y térmicas de la aleación Ti-6Al-4V

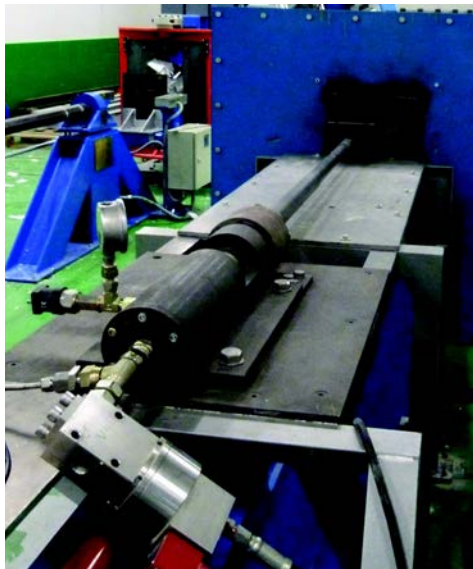
forjadas e implantes biomédicos. A pesar de ser mucho más caro que la mayoría de los metales de aplicaciones estructurales, debido a la complejidad del proceso de extracción, la dificultad de fusión, y los problemas asociados con la fabricación y mecanizado, año tras año se incrementa el uso y la producción de aleaciones de titanio.

### 5.2. Ensayos de Impacto

Se ha llevado a cabo una campaña de ensayos de impacto de alta velocidad. El objetivo principal de la prueba de impacto está dirigido a obtener la relación entre la velocidad de impacto del proyectil y la velocidad residual después de atravesar el objetivo. Como se ha indicado anteriormente el material seleccionado ha sido la aleación de titanio Ti 6Al-4V. Esta aleación es, con mucho, la aleación de titanio más usada y por lo tanto está estudiada y documentada en profundidad.

Para calibrar los parámetros de los diferentes criterios de fallo y validar el modelo numérico propuesto, se han realizado ensayos de impacto sobre placas de Ti 6Al-4V. Las placas ensayadas son de 3 mm de espesor y un tamaño 110x110 mm<sup>2</sup> y se sometieron a impactos con un cilindro de acero templado de 5,5 mm de diámetro, con una longitud de 7,9 mm siendo su masa de 1,47 g. Este acero templado se ha comprobado que es suficientemente rígido no observándose durante el proceso de impacto ningún tipo de deformación plástica apreciable.

Los proyectiles son acelerados por medio de un cañón de gas ligero de una etapa (SABRE Balística) que utiliza helio comprimido hasta 200 bar. La longitud del cañón es de 1 m, y su calibre es de 7,65 mm (véase la figura 5.2). Dado que el calibre del cañón de gas es ligeramente mayor que el diámetro del proyectil, es necesario poner un casquillo postizo para lanzar el proyectil. Este cañón de gas es capaz de impulsar los proyectiles insertados en el casquillo postizo hasta una velocidad de 800 m/s.



(a) Cañón de gas comprimido usado en los ensayos de impacto a alta velocidad para acelerar los proyectiles



(b) Videocámara digital de alta velocidad usada para registrar el vuelo y el impacto de los proyectiles.

**Figura 5.2:** Equipo utilizado en los ensayos de impacto a alta velocidad

La distancia entre la boca del cañón y la placa de titanio se fijó en 1,0 m. La placa se sujeta adecuadamente para soportar un impacto normal a su superficie. Durante la prueba, se utilizó una vídeo-cámara digital de alta velocidad (Photron Ultima APX) para registrar el vuelo

## 5. ENSAYOS DE IMPACTO SOBRE TI 6AL-4V

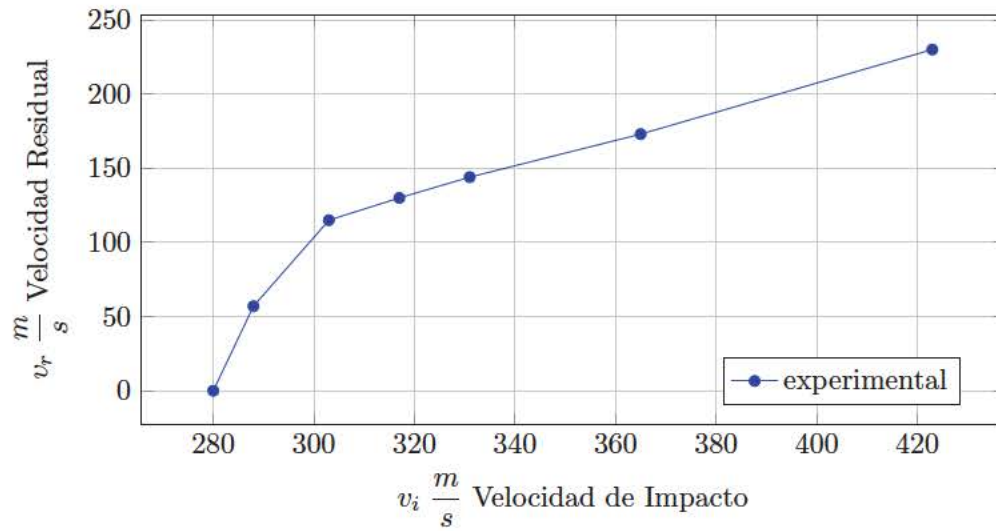
---

del proyectil y la perforación de la placa tras el impacto. La cámara se colocó perpendicular a la dirección de impacto con el fin de capturar la entrada y la salida del proyectil a través de la placa (véase la figura 5.3). La figura 5.2 muestra el equipo utilizado en las pruebas de impacto de alta velocidad.

Para determinar la velocidad del proyectil antes (*velocidad de impacto*) y después (*velocidad residual*) del impacto sobre la placa de titanio es necesario realizar un procesamiento de la secuencia de imágenes. La velocidad seleccionada para la videocámara digital de alta velocidad fue de 37.500 fotogramas por segundo, la resolución de las imágenes es de 384x160 píxeles y la velocidad del obturador se ajustó a aproximadamente  $10^{-5}s^{-1}$ . Las velocidades de impacto considerados en las pruebas de impacto destinados a validar el algoritmo numérico han oscilado entre los 100 y los 430  $\frac{m}{s}$  aproximadamente. A partir de los resultados de las pruebas se ha estimado la velocidad mínima a la que el proyectil perfora la placa, que se denomina *límite balísticos* ( $v_l$ ). En nuestro caso se ha determinado un valor de 280  $\frac{m}{s}$ . Los resultados experimentales se muestran en la tabla 5.2.

Velocidad de Impacto $\frac{m}{s}$	Velocidad Residual $\frac{m}{s}$
280	0
288	57
303	115
317	130
331	144
365	173
423	230

**Tabla 5.2:** Resultados experimentales de los ensayos de impacto a alta velocidad.



**Figura 5.4:** Gráfica de velocidad residual frente a velocidad de impacto obtenidos experimentalmente. Las placas ensayadas son de 3 mm de espesor y un tamaño  $110 \times 110 \text{ mm}^2$  y se sometieron a impactos con un cilindro de acero templado de 5,5 mm de diámetro, con una longitud de 7,9 mm siendo su masa de 1,47 g

## 5. ENSAYOS DE IMPACTO SOBRE TI 6AL-4V

---



**Figura 5.3:** Secuencia de imágenes obtenidas para un ensayo de impacto a  $365 \frac{m}{s}$

## 6

# Calibración y Validación

Como se comentó anteriormente entre los objetivos de esta Tesis Doctoral se encuentra la implementación, dentro de un código de elementos finitos, de un conjunto de modelos de fallo, incluido el daño isótropo, que permita la evaluación, validación y comparación de los mismos aplicado, entre otros, a problemas de impacto a alta velocidad y mecanizado a alta velocidad de corte.

El algoritmo numérico totalmente acoplado con el modelo de daño isótropo descrito en el Capítulo 4 Resolución Numérica se ha implementado en el código comercial de elementos finitos ABAQUS explicit y se ha aplicado a la simulación de ensayos de impacto de alta velocidad. Entre los propósitos de las simulaciones numéricas se encuentra el demostrar la validez del algoritmo numérico desarrollado y al mismo tiempo demostrar que el modelo de daño isótropo es adecuado para predecir el fallo de un material bajo condiciones de carga dinámica como es el caso del impacto a alta velocidad.

El modelo constitutivo planteado en 3 Modelo Constitutivo corresponde al caso general en el que el daño está acoplado con el resto de fenómenos y variables mecánicas (endurecimientos isótropo y cinemático, efectos viscoplásticos y dilatación térmica) en particular con la tensión de Cauchy a través de la tensión efectiva según se establece en 4.27. Como se puede comprobar, el algoritmo numérico de integración propuesto en el Capítulo 4 Resolución Numérica de esta Tesis Doctoral para la resolución de este caso general es también válido para modelos constitutivos del material que no incluyan el daño pero sí los efectos del endurecimiento isótropo y cinemático. Para ello basta con eliminar la ecuación referente a la evolución del daño y anular el valor de éste en todas las expresiones. Aprovechando esta circunstancia, la subrutina desarrollada para el cálculo de la evolución del daño isótropo se ha adaptado de manera que pueda considerar otros



## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

---

criterios de fallo y así permitir realizar una comparación de los resultados obtenidos por cada uno de ellos, incluido el criterios de fallo por daño isótropo.

Los parámetros de los diferentes criterios de fallo que se han considerado en esta Tesis Doctoral se han calibrado y validado teniendo en cuenta los resultados obtenidos a partir de la campaña de ensayos experimentales que se describen en el Capítulo 5 Ensayos de impacto sobre Ti 6Al-4V. En general, los parámetros que caracterizan cada uno de los criterios de fallo son altamente dependientes de las condiciones de carga. No está dentro de los objetivos de las simulaciones numéricas el calcular con precisión todos los parámetros de cada modelo de fallo, teniendo además en cuenta que las simulaciones numéricas en general, dependen en gran medida del tamaño, tipo y orientación de los elementos de malla, si bien si pretende extraer conclusiones sobre la bondad y capacidad de cada uno de los criterios de fallo en su aplicación, al menos, para el estudio de impactos a alta velocidad.

Los criterios de fallo que se han implementado, además del modelo de fallo por daño isótropo, son los descritos en el Capítulo 2.4 Criterios de Fallo:

- modelo de fallo por deformación plástica equivalente constante,
- modelo de fallo por máxima tensión de cortadura,
- modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh
- modelo de fallo de Wilkins,
- modelo de fallo de Johnson - Cook y
- modelo de fallo de Xue - Wierzbicki

Los criterios de fallo planteados, con excepción del de daño, están desacoplados de las variables mecánicas, es decir, el deterioro progresivo que sufre el material a medida que se somete a las cargas exteriores no afecta a las variables mecánicas. Para cada ciclo de integración se debe actualizar la variable que controla el deterioro del material y cuando esa variable alcanza un valor determinado o se cumple una condición establecida por el criterio de fallo correspondiente, el elemento se elimina. Todos estos casos corresponden a un caso particular del modelo general planteado en los que el daño es siempre nulo y la eliminación de los elementos se determina, no por alcanzar la variable daño un valor crítico sino por alcanzar una variable independiente (la

---

de control del deterioro de material) un valor determinado.

Algunos de estos criterios de fallo han sido evaluados y calibrados para la aleación de aluminio 2024-T351 por otros investigadores como T. Wierzbicki et. al (56) que determinan los parámetros de cada criterio de fallo a partir de un conjunto más o menos amplio de ensayos cuasi-estáticos como los realizados por Bao (5). A partir de estos parámetros X. Teng y T. Wierzbicki (48) han tratado de validar los parámetros aplicándolos con un éxito relativo en ensayos de impacto a alta velocidad.

Teniendo en cuenta que el comportamiento de las aleaciones metálicas suele tener un fuerte grado de dependencia con la temperatura y la velocidad de deformación, parece más razonable basar la calibración de los parámetros de cada criterio de fallo en ensayos dinámicos, en los que sea previsible la apreciación de dicha dependencia, en lugar de usar ensayos cuasi-estáticos donde dicha dependencia es inapreciable.

Utilizando como ensayos experimentales para la calibración de los parámetros el impacto a alta velocidad, en los que está contrastada la aparición del endurecimiento isótropo y cinemático, el ablandamiento térmico y el endurecimiento debido a la velocidad de deformación, en lugar de ensayos cuasi-estáticos entendemos que obtendremos unos parámetros válidos para un conjunto más amplio de aplicaciones incluyendo condiciones dinámicas de carga.

A diferencia de los investigadores que acabamos de mencionar, la determinación de los parámetros de cada criterio de fallo se realizará, en general, ajustando las simulaciones con los resultados experimentales en tantos puntos de la curva  $v_{\text{impacto}}$  &  $v_{\text{residual}}$  (véase la figura 5.4) como parámetros necesite el criterio que se pretende calibrar. No obstante, en algunos casos se han utilizado algunos parámetros de la literatura. La bondad de cada criterio de fallo se determinará comparando los resultados obtenidos experimentalmente a otras velocidades de impacto con los obtenidos en la simulaciones numéricas implementadas en la subrutina VUMAT de ABAQUS explicit.

Además de los parámetros característicos de cada modelo de fallo que se comentarán más adelante se emplearán otros parámetros que caracterizan el comportamiento de la aleación Ti6Al4V los cuales se detallan en la tabla 6.1.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

Propiedades Físicas					
Densidad ( $\rho_0$ )	Calor Específico ( $c_v$ )	Conductividad Térmica ( $K_{ter}$ )	Coeficiente de Dilatación ( $\alpha$ )		Temperatura de Fusión( $T_m$ )
4420 $Kg/m^3$	560 $J/Kg^{\circ}K$	0.452 $W/^{\circ}Km$	9.2 $e^{-6} \text{ }^{\circ}K^{-1}$		1933 $^{\circ}K$
Parámetros de Johnson-Cook					
$A_{JC}$	$B_{JC}$	$C_{JC}$	$\beta_{JC}$	$\phi_{JC}$	$\dot{p}_0$
896 $MPa$	656 $MPa$	0.0128	0.5	0.8	1 $s^{-1}$
Parámetros del Endurecimiento Cinemático					
$C_{k1}$	$C_{k2}$				
92000 $MPa$	289.76 $MPa^{-1}$				
Parámetros Mecánicos y Otros					
E	$\nu$	$\eta_{QT}$	$T_0$		
114000 $MPa$	0.33	0.9	293 $^{\circ}K$		

**Tabla 6.1:** Valores de las propiedades físicas y de los diferentes parámetros que caracterizan el comportamiento mecánico de la aleación Ti6Al4V

### 6.1. Simulación de problemas de impacto con elementos finitos

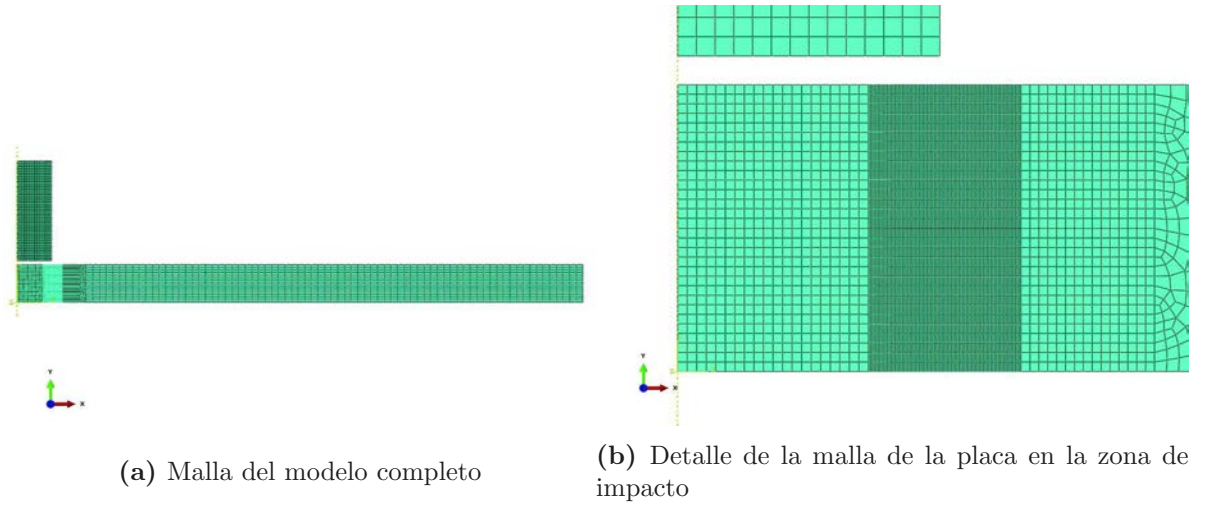
Las prestaciones del algoritmo numérico propuesto se han evaluado a través de simulaciones numéricas del impacto perpendicular de un proyectil sobre una placa. El modelo numérico de elementos finitos reproduce la geometría y las condiciones de impacto que se describen en el Capítulo 5 Ensayos de impacto sobre Ti 6Al-4V.

Los impactos de los proyectiles son ortogonales a la placa y centrados en su punto medio, por tanto, con el fin de reducir el número de elementos, los cuales influyen directamente en el coste computacional, se ha supuesto que el problema presenta simetría axial respecto al eje del proyectil cilíndrico.

Siguiendo la formulación de Lagrange se ha desarrollado un modelo de revolución utilizando el código comercial de elementos finitos ABAQUS explicit. Para el análisis del modelo constitutivo descrito en 3 Modelo Constitutivo se han utilizado elementos del tipo CAX4R (Abaqus (1)) que son elementos de cuatro nodos con simetría axial.

Para modelar la geometría del proyectil se ha usado una matriz regular de elementos rectangulares compuesta por 14 elementos horizontales y 39 elementos verticales. La malla usada para modelar la placa sobre la que impacta el proyectil se ha dividido en varias regiones. Cerca del eje de simetría la malla está compuesta por elementos cuadrados de 0.1x0.1mm. En el borde

de la región de impacto, donde se espera el fallo del material, la malla es más fina y compuesta de elementos rectangulares de  $0.1 \times 0.016 \text{ mm}$ . A continuación de esta región de impacto hay una zona de transición con una malla idéntica a la región inicial cerca del eje de simetría. Por último, para la región más alejada del eje de simetría, el tamaño del elemento se aumenta hasta  $0.526 \times 0.2 \text{ mm}$ . En la figura 6.1 se puede observar la geometría básica, las dimensiones y las condiciones de contorno de la malla descrita más arriba.



**Figura 6.1:** Malla empleada en la simulación numérica del impacto perpendicular de un proyectil de cabeza plana sobre una placa empotrada en sus extremos. La malla de la placa está compuesta por 5275 elementos

## 6.2. Validez de la Hipótesis Adiabática

Para validar la hipótesis de comportamiento adiabático se debe verificar que la potencia disipada en cada elemento asociado a los efectos irreversibles es mucho mayor que la potencia transferida a los elementos adyacentes por conducción. La potencia generada en cada elemento está determinada por

$$W^p = \int_{V_{elemento}} \bar{\sigma} : \dot{\epsilon} dV \quad (6.1)$$

La potencia que transmite por conducción a los elementos adyacentes es:

$$W^c = \int_{A_{elemento}} K_{ter} \nabla T d\bar{A} \quad (6.2)$$

Donde  $K_{ter}$  es la conductividad térmica del material. El orden de magnitud de  $\dot{\epsilon}$  para los

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

---

elementos de la placa situados en el borde del proyectil es:

$$\dot{\epsilon} \approx \frac{v_{imp}}{d_{elemento}} \quad (6.3)$$

Donde  $d_{elemento}$  es la dimensión característica de los elementos de la malla y  $v_{imp}$  es la velocidad de impacto del proyectil. Dado que la deformación plástica se alcanza una vez que  $\sigma_{eq}$  sobrepasa la tensión de plastificación y ésta es aproximadamente  $A_{JC}$  en el caso de la función de plastificación de Johnson-Cook, se tiene que el orden de magnitud de  $W^p$  es:

$$W^p \approx A_{JC} \frac{v_{imp}}{d_{elemento}} d_{elemento}^3 \approx A_{JC} v_{imp} d_{elemento}^2 \quad (6.4)$$

El orden de magnitud del máximo gradiente de temperatura  $\nabla T$  que podemos esperar es:

$$\nabla T \approx \frac{T_m - T_r}{d_{elemento}} \quad (6.5)$$

Por tanto el orden de magnitud de la máxima transferencia de calor por conducción de un elemento es:

$$W^c \approx K_{ter} \frac{(T_m - T_r)}{d_{elemento}} d_{elemento}^2 \approx K_{ter} (T_m - T_r) d_{elemento} \quad (6.6)$$

Por tanto, para poder considerar un comportamiento adiabático de los elementos de la malla se debe cumplir:

$$W^p \gg W^c \Rightarrow A_{JC} v_{imp} d_{elemento}^2 \gg K_{ter} (T_m - T_r) d_{elemento} \quad (6.7)$$

Por tanto, para considerar el comportamiento de los elementos como adiabático su tamaño debe cumplir:

$$d_{elemento} \gg \frac{K_{ter} (T_m - T_r)}{A_{JC} v_{imp}} \quad (6.8)$$

Teniendo en cuenta los valores mostrados en la tabla 5.1 y que  $T_r = 288^\circ K$  y considerando que el orden de magnitud de  $v_{imp} \approx 300 \frac{m}{s}$  resulta en  $d_{elemento} \gg 4,5e^{-8} m$ . Como se comentó anteriormente, la dimensión más pequeña de los elementos es  $0,016 mm$  y por tanto podemos asumir como válida la hipótesis de comportamiento adiabático de los elementos.

### 6.3. Cálculo de la velocidad residual

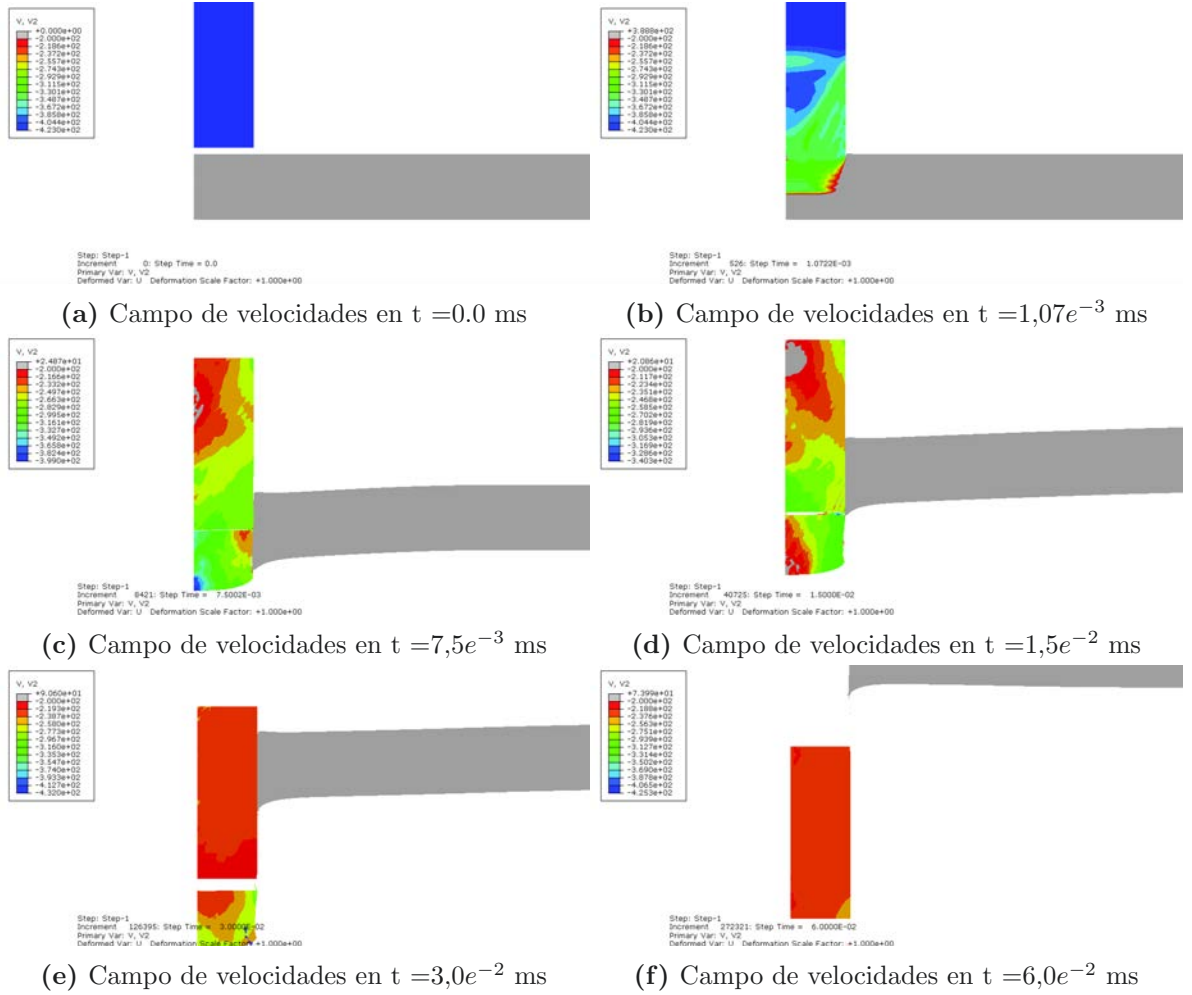
Tras el impacto del proyectil sobre la placa se generan una serie de ondas de presión que se transmiten a lo largo del proyectil. El efecto de estas ondas es adaptar las velocidades de las

partículas del proyectil a las condiciones de contorno impuestas por el impacto con la placa. Como consecuencia de la propagación de estas ondas de presión se puede comprobar que no todos los nodos o elementos del proyectil se encuentran a la misma velocidad de manera que tras la perforación de la placa, cada nodo o elemento que constituye el proyectil se está desplazando a una velocidad diferente como se puede observar en la figura 6.2.

Las variaciones de velocidad de unos elementos a otros es considerable de modo que es necesario analizar el campo de velocidades de los elementos que constituyen el proyectil para determinar la velocidad residual del mismo. Para ello se ha desarrollado en C++ una aplicación que hace uso de la librería “odb\_API.h” que proporciona Abaqus para la lectura de los ficheros “.odb” en los que Abaqus guarda los resultados. De esta manera se ha calculado la energía cinética de cada uno de los elementos que constituyen el proyectil y a partir de la suma de todas ellas se ha determinado la energía cinética total del proyectil. Dado que la masa total del proyectil es conocida, es fácil determinar la velocidad residual del proyectil a partir de la expresión 6.9:

$$E_c = \sum_{elemento_i=1}^{elemento_n} \frac{1}{2} m_{elemento_i} v_{elemento_i}^2 = \frac{1}{2} m_p v_r^2 \implies v_r^2 = \frac{2E_c}{m_p} \quad (6.9)$$

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.2:** Evolución del campo de velocidades en el proyectil y la placa

### 6.4. Criterio I: Deformación plástica equivalente constante

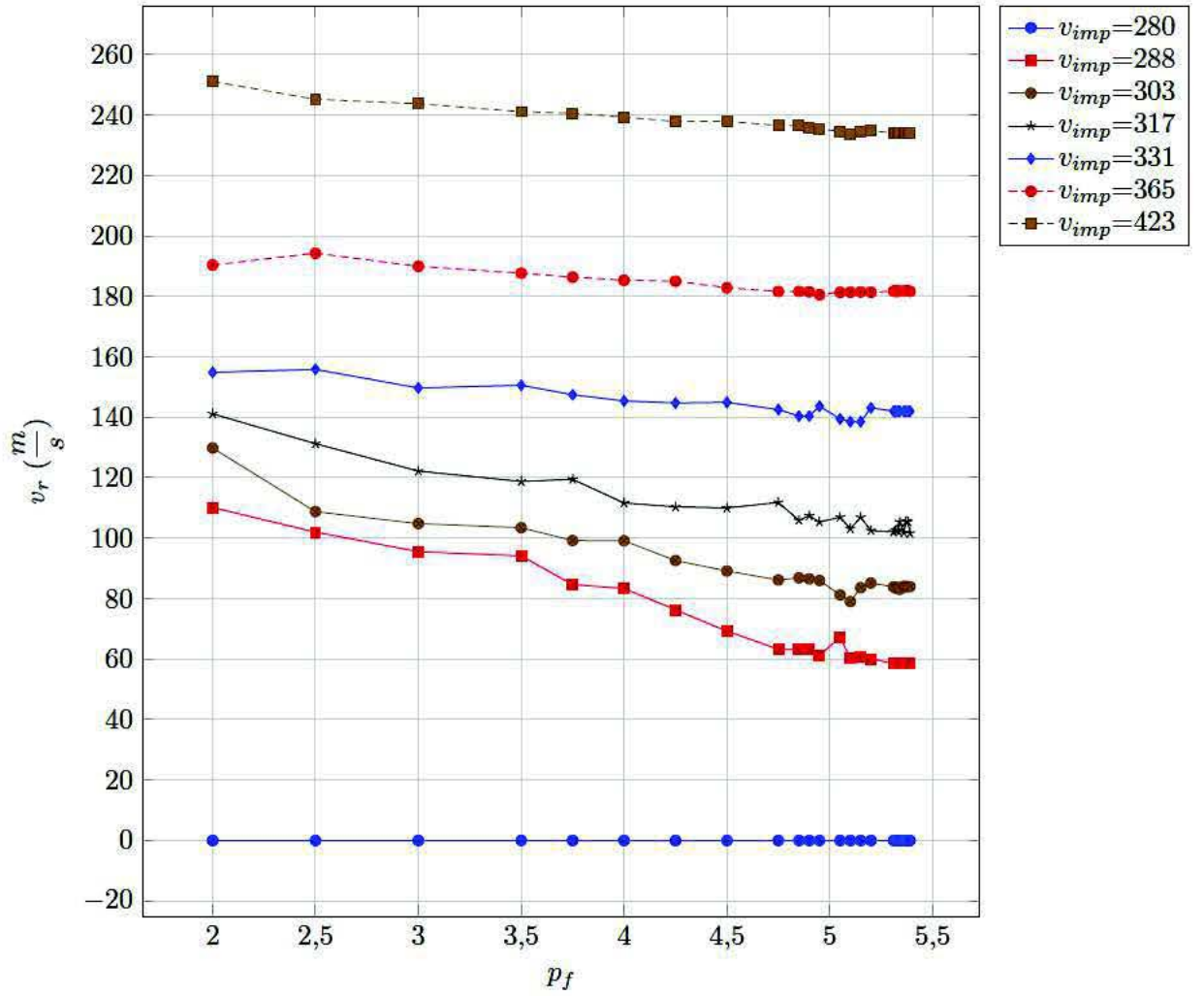
Como se comentó en 2.4.3 Criterio I: Deformación plástica equivalente constante se pueden considerar dos variantes de este criterio, la primera basada en el cálculo de la deformación plástica equivalente ( $\epsilon_{eq}$ ) y la segunda basada en la deformación plástica equivalente acumulada  $p$ . En ambos casos el criterio solo depende de un único parámetro  $\epsilon_f$  y  $p_f$  respectivamente. Se ha realizado un barrido del parámetro respectivo para ambas variantes tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual para la velocidad de impacto  $v_{imp}=288$ .

En el caso de la variante basada en la deformación plástica equivalente acumulada, se puede observar en la figura 6.3 que la velocidad residual ( $v_r$ ) es decreciente al aumentar la deformación plástica equivalente acumulada a rotura (parámetro  $p_f$ ) si bien se observa que a partir de  $p_f \approx 5,3$  las velocidades residuales se mantienen constantes para cada velocidad de impacto  $v_{imp}$ . Esto es debido a que los elementos, al incrementarse su deformación plástica, experimentan un incremento de su temperatura de manera que el ablandamiento térmico es dominante. Este incremento de temperatura es tal que la temperatura del elemento se aproxima a la temperatura de fusión del material.

Como se comentó en el Paso 3.0 descrito en el apartado 4.7 Procedimiento de Resolución los elementos no solo se deben eliminar una vez el índice de daño alcanza el valor correspondiente al fallo, también se deben eliminar cuando la temperatura que alcanza el elemento se aproxima a la temperatura de fusión  $T_m$ . Dicha eliminación de elementos se debe a que la tensión de plastificación, según el modelo de Johnson Cook descrito en 3.4.2.2.1 Ecuación de Johnson Cook y conforme al modelo de consistencia, tiende a cero a medida que la temperatura se acerca a la temperatura de fusión (ver 3.35) y por tanto dichos elementos no son capaces de soportar tensiones. Por ello no es posible reducir la velocidad residual tanto como se quiera aumentando la deformación plástica a rotura, a partir de cierto valor del parámetro  $p_f$ , este modelo de fallo del material predice que el fallo se produce por el ablandamiento térmico del material en lugar de deberse a la deformación plástica equivalente.

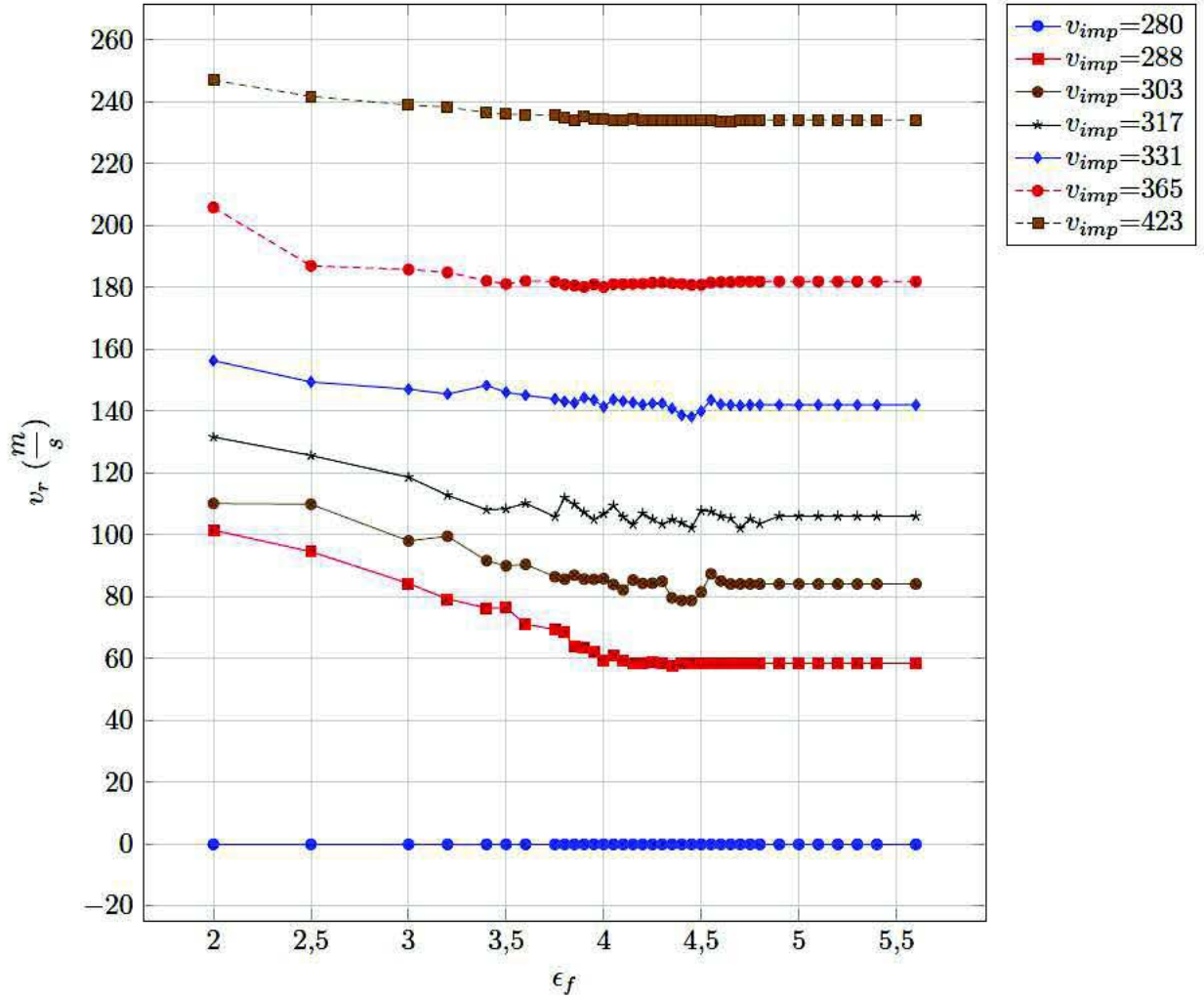


## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.3:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función de la deformación plástica equivalente acumulada a rotura ( $p_{eq}$ )

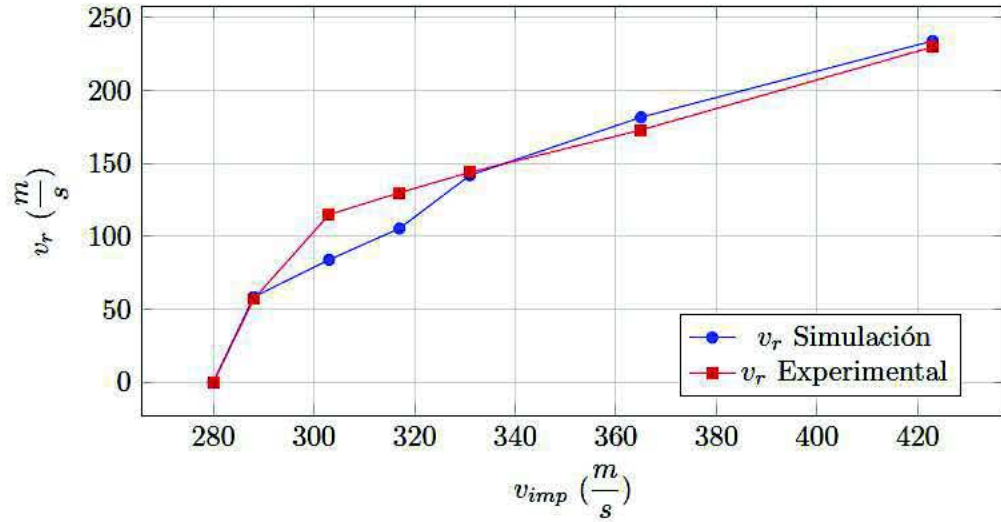
Lo mismo sucede para la variante basada en la deformación plástica equivalente como se puede observar en la figura 6.4. La velocidad residual ( $v_r$ ) es decreciente al aumentar la deformación plástica equivalente a rotura (parámetro  $\epsilon_f$ ) si bien se observa que a partir de  $\epsilon_f \approx 4,9$  las velocidades residuales se mantienen prácticamente constantes para cada velocidad de impacto  $v_{imp}$ .



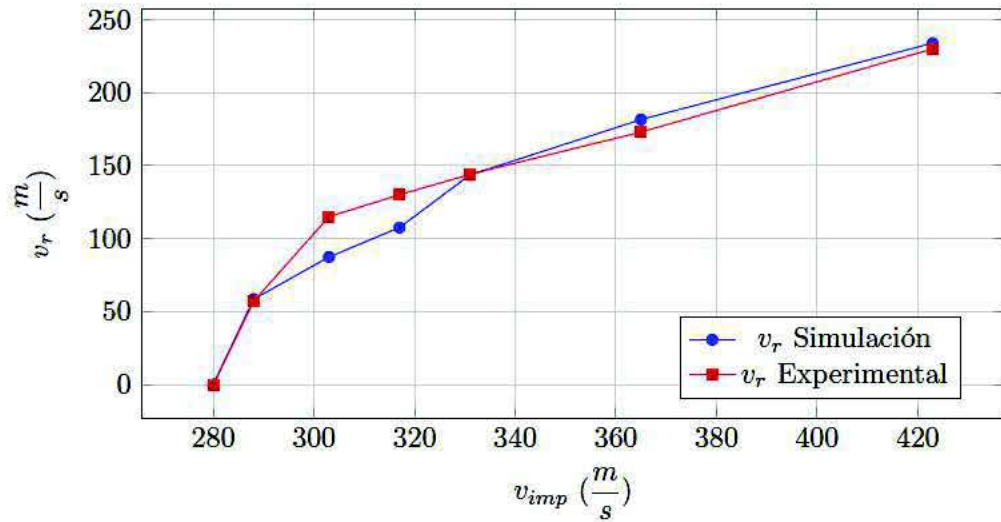
**Figura 6.4:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función de la deformación plástica equivalente a rotura ( $\epsilon_f$ )

Del conjunto de parámetros probados para el ajuste de la curva velocidad residual ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) el que proporciona un mejor ajuste corresponde a  $\epsilon_f = 4.55$  para la variante basada en la deformación plástica equivalente y  $p_f=5.37$  para la variante basada en la deformación plástica equivalente acumulada. En las figuras 6.5 y 6.6 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para ambas variantes.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



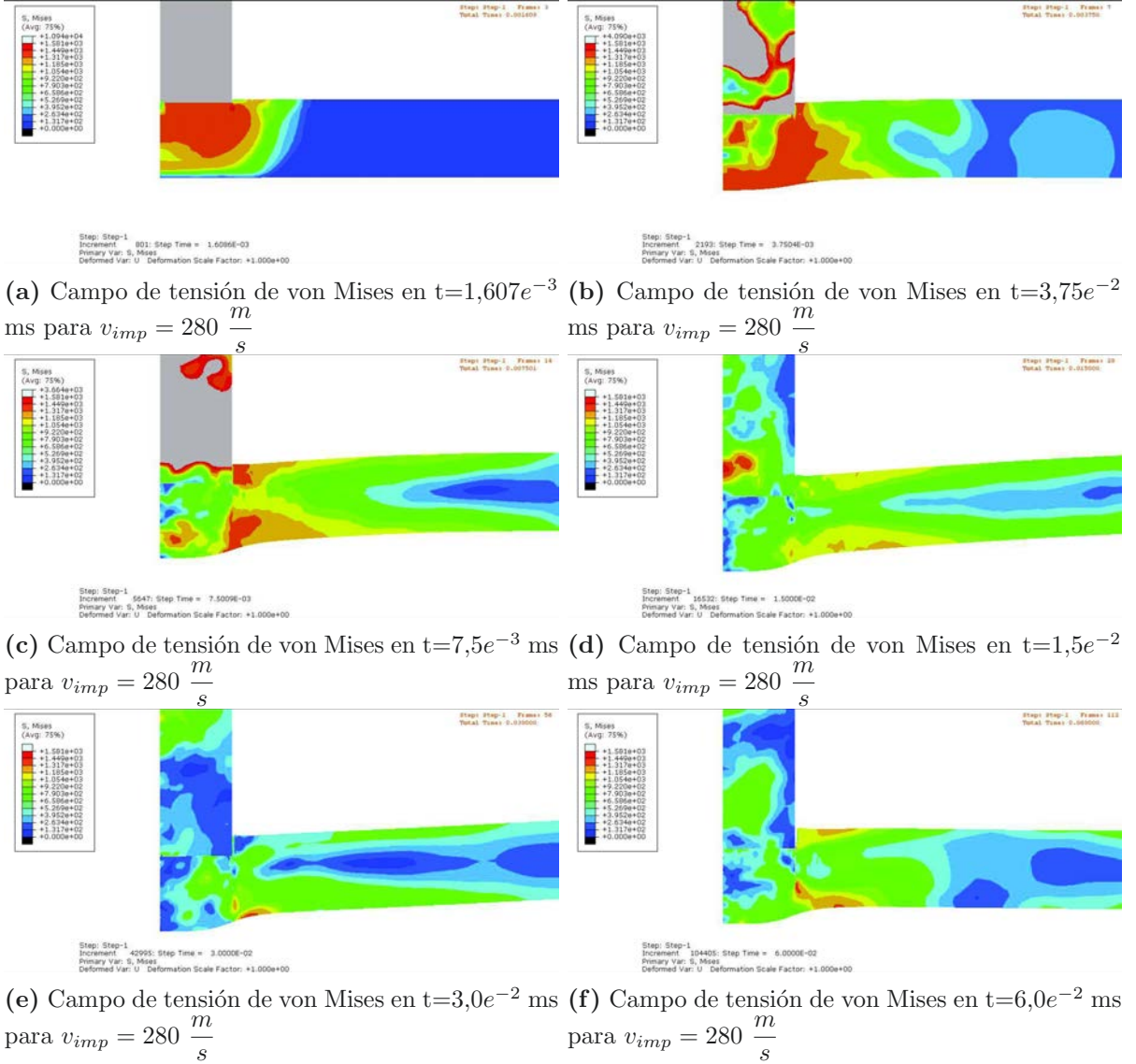
**Figura 6.5:** Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para la variante basada en la deformación plástica equivalente acumulada correspondiente a un valor de  $p_f = 5.37$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (27 % error) y 317 (19 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,1 %.



**Figura 6.6:** Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para la variante basada en la deformación plástica equivalente correspondiente a un valor de  $\epsilon_f = 4.55$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (24 % error) y 317 (17 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5 %.

## 6.4 Criterio I: Deformación plástica equivalente constante

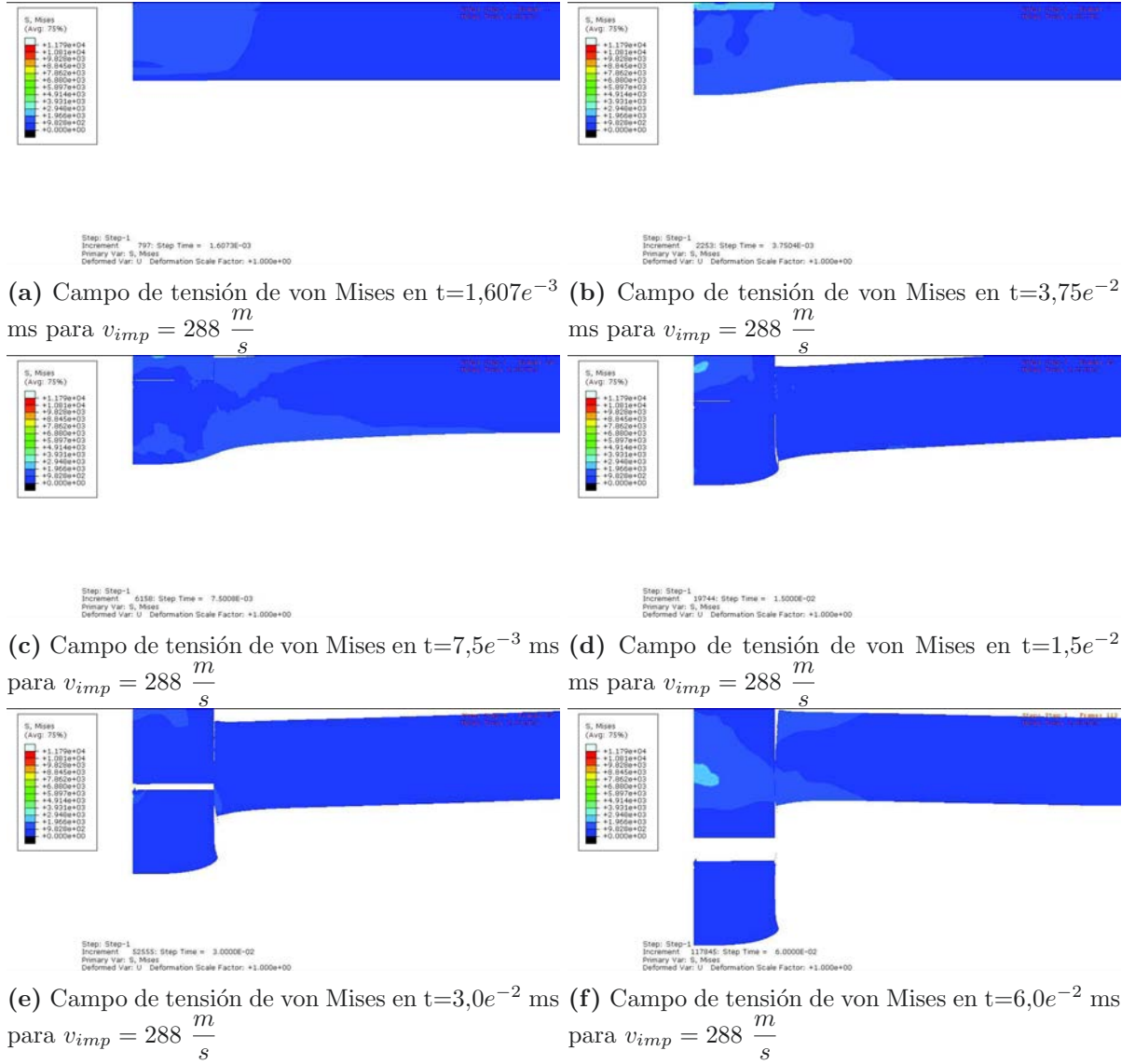
En las figuras 6.7, 6.8 y 6.9 se puede ver que las simulaciones correspondientes al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada  $p$  para todas las velocidades de impacto predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón. Resultados similares se observan en el modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente  $\epsilon_{eq}$ .



**Figura 6.7:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada y para un valor de  $p_f = 5,37$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa.

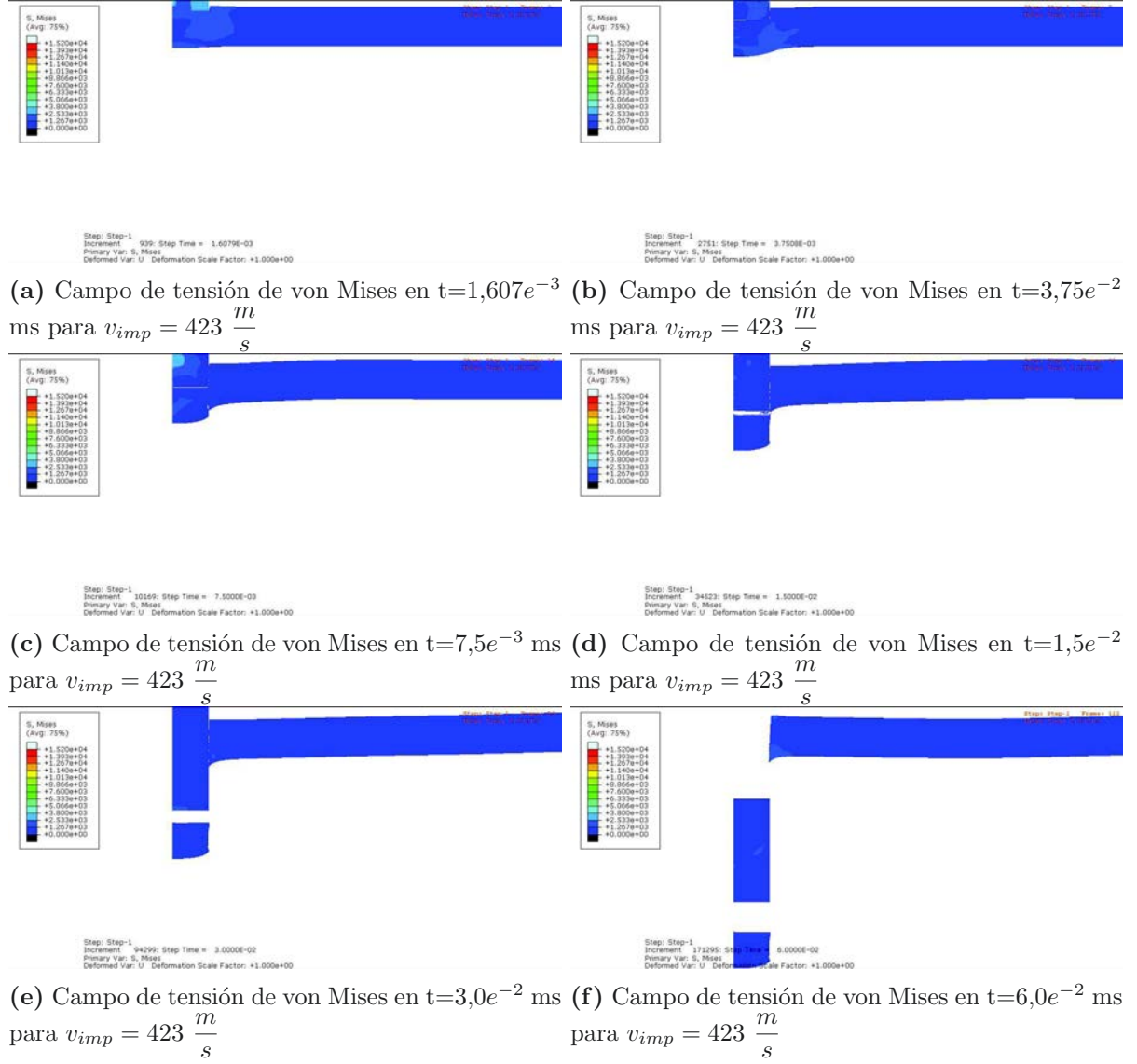


## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.8:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada y para un valor de  $p_f = 5,37$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6.4 Criterio I: Deformación plástica equivalente constante



**Figura 6.9:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo basado en la deformación plástica equivalente acumulada y para un valor de  $p_f = 5,37$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

### 6.5. Criterio II: Máxima tensión de cortadura

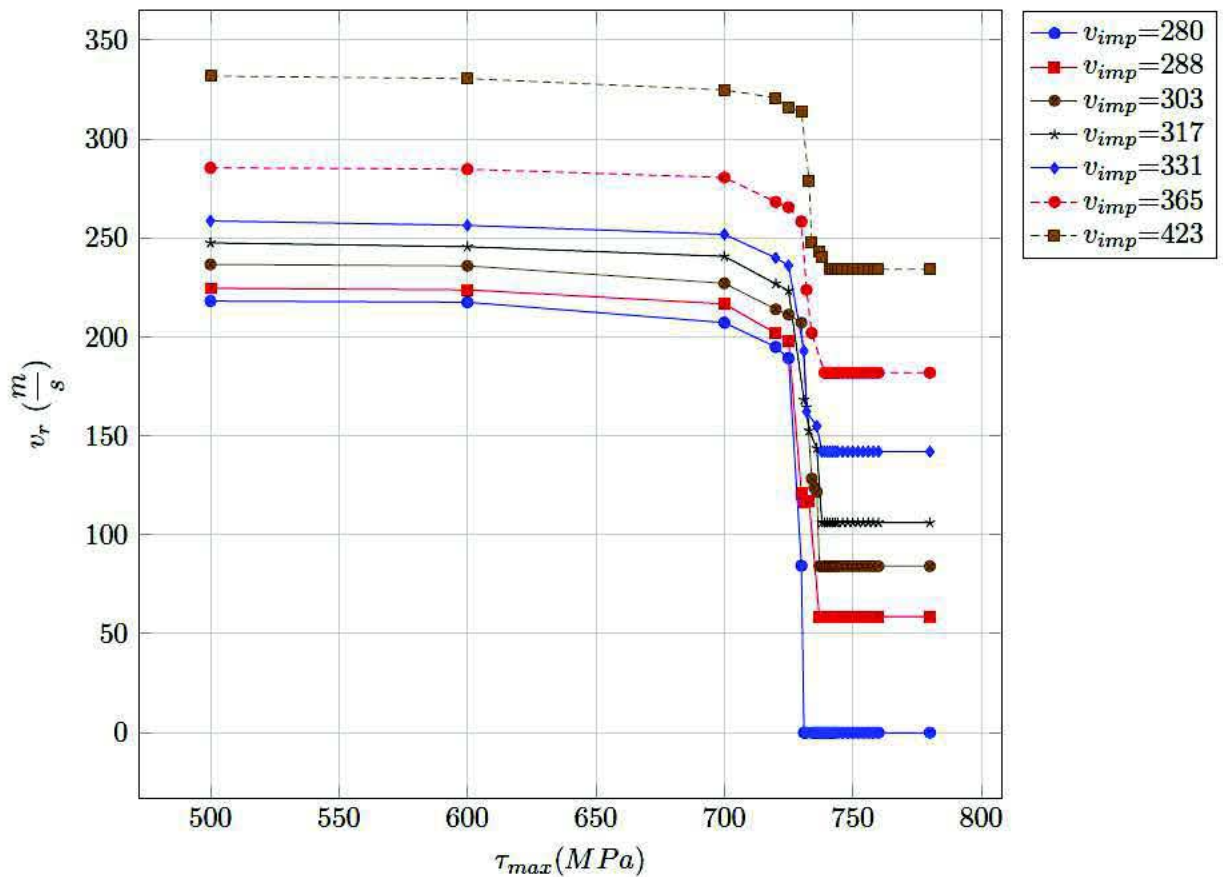
Como se comentó en 2.4.4 Criterio II: Máxima tensión de cortadura este criterio depende de un único parámetro  $\tau_{max}$ . Se ha realizado un barrido de dicho parámetro tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual para la velocidad de impacto  $v_{imp}=288$ . En la figura 6.10 se presenta la velocidad residual para diferentes velocidades de impacto en función del parámetro  $\tau_{max}$ . Se puede apreciar que por el lado correspondiente a valores bajos de  $\tau_{max}$  todas las curvas presentan una tendencia asintótica. Esto se debe a que a bajos valores de  $\tau_{max}$  el material se rompe muy fácilmente y la energía del impacto se emplea principalmente en acelerar el tapón y en trabajo de la tensión de cortadura a lo largo de la superficie de rotura de la chapa. En la ecuación 6.10 se presenta una expresión para la estimación de la velocidad residual. Para ello se ha supuesto que tanto el proyectil como el tapón salen expulsados a la misma velocidad. A lo largo de la superficie de rotura se ha supuesto que  $\tau$  crece de forma lineal hasta alcanzar  $\tau_{max}$  a medida que cada elemento de la superficie se deforma desde un  $y_0$  hasta  $y_f$  y todo ello para todos los elementos de la superficie de fractura.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}m_{proyectil}v_{imp}^2 &\approx \frac{1}{2}v_r^2(m_{proyectil} + m_{tapon}) + 2\pi radio_{proyectil} \int_0^{h_{placa}} \int_{y_0}^{y_f} \tau(y, h) dy dh \approx \\
 \frac{1}{2}v_r^2(m_{proyectil} + m_{tapon}) &+ 2\pi radio_{proyectil} h_{placa} \int_{y_0}^{y_f} \tau(y) dy \approx \\
 \frac{1}{2}v_r^2(m_{proyectil} + m_{tapon}) &+ 2\pi radio_{proyectil} h_{placa} \frac{\tau_{max}}{2} h_{placa} f_h \implies \\
 v_r^2 &\approx \frac{2}{m_{proyectil} + m_{tapon}} \left( \frac{1}{2}m_{proyectil}v_{imp}^2 - 2\pi radio_{proyectil} h_{placa}^2 \tau_{max} f_h \right) \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

Donde  $f_h$  es un factor corrector que tiene en cuenta que  $y_f - y_0$  es menor  $h_{placa}$ . A medida que aumenta  $\tau_{max}$  empieza a ser relevante la energía elástica que se acumula durante la deformación de la placa lo que reduce considerablemente la velocidad residual del proyectil. Por otro lado se puede apreciar que para valores altos de  $\tau_{max}$  la velocidad residual del proyectil se mantiene constante. Esto se debe a que en los impactos a alta velocidad los elementos experimentan un ablandamiento por deformación debido a los efectos térmicos. De esta manera, la tensión de cortadura en lugar de incrementarse monótonamente con la deformación plástica decrece después de alcanzar un máximo. En condiciones adiabáticas, los elementos continúan deformándose de manera plástica incrementando su temperatura pero sin aumentar la tensión de cortadura debido al ablandamiento térmico. En estas condiciones los elementos son eliminados ya que la tensión de plastificación, según el modelo de Johnson Cook descrito en 3.4.2.2.1 Ecuación de Johnson Cook y conforme al modelo de consistencia, tiende a cero a medida que la temperatura se

## 6.5 Criterio II: Máxima tensión de cortadura

acerca a la temperatura de fusión (ver 3.35) y por tanto dichos elementos no son capaces de soportar tensiones. Como se comento en el Paso 3.0 descrito en el apartado Procedimiento de Resolución 4.7 los elementos no solo se deben eliminar una vez el índice de daño alcanza el valor correspondiente al fallo, también se deben eliminar cuando la temperatura que alcanza el elemento se aproxima a la temperatura de fusión  $T_m$ .



**Figura 6.10:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función de la máxima tensión de cortadura a rotura ( $\tau_{max}$ )

Del conjunto de parámetros probados para el ajuste de la curva velocidad residual ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) el que proporciona un mejor ajuste corresponde a  $\tau_{max} = 740$  MPa. En la figura 6.11 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para este modelo de fallo.



## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

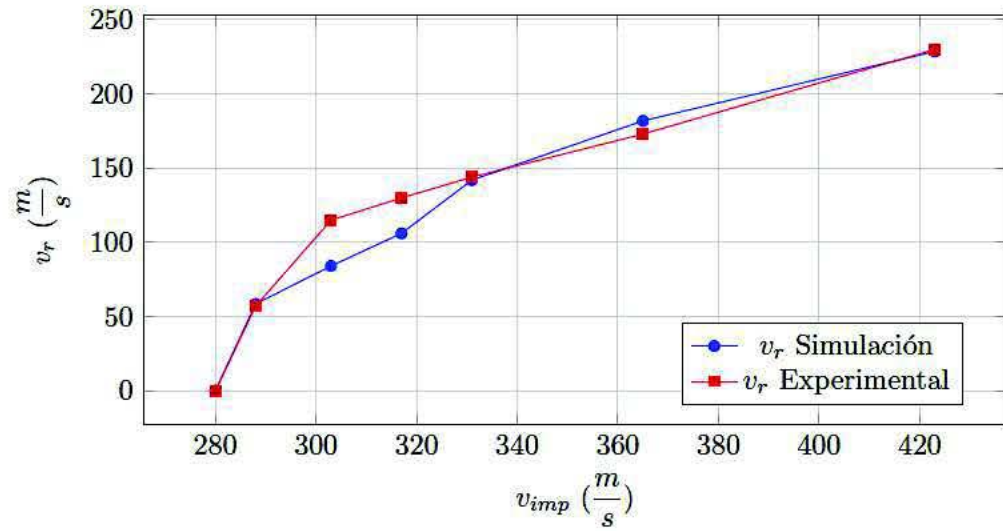
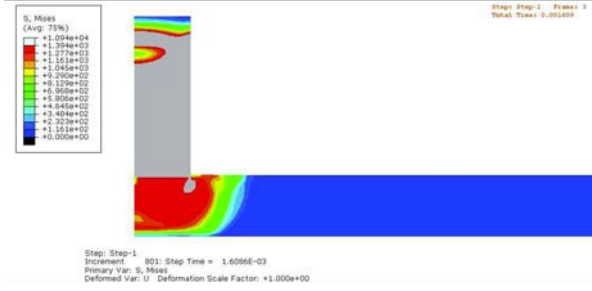


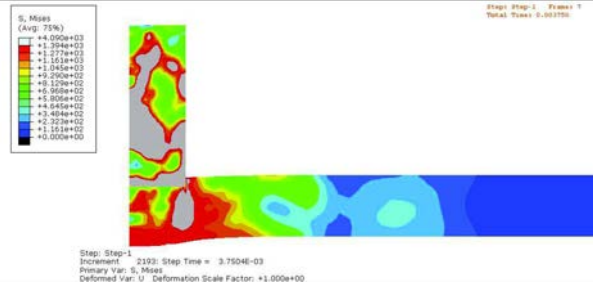
Figura 6.11: Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo basado en la máxima tensión de cortadura correspondiente a un valor de  $\tau_{max} = 740$  MPa. Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (26,8% error) y 317 (18,4% error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,15%.

## 6.5 Criterio II: Máxima tensión de cortadura

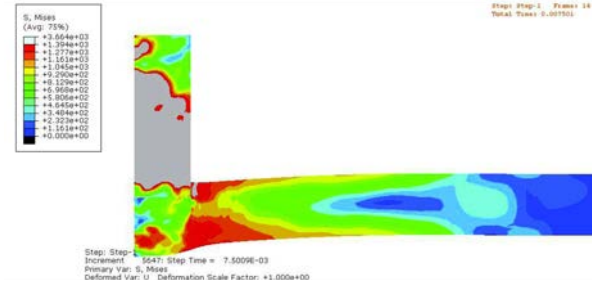
En las figuras 6.12, 6.13 y 6.14 se puede ver que las simulaciones predicen para todas las velocidades de impacto un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



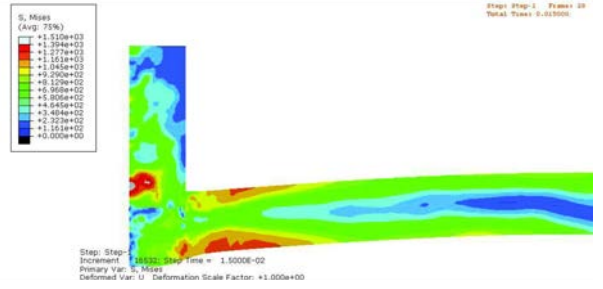
(a) Campo de tensión de von Mises en  $t=1,607e^{-3}$  ms para  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$



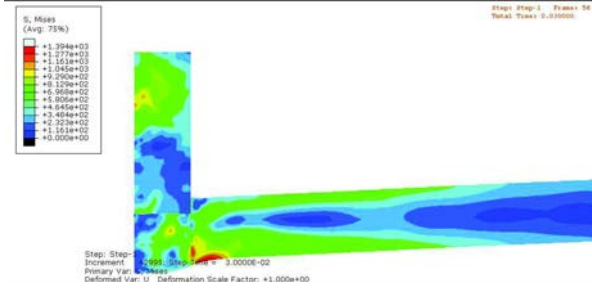
(b) Campo de tensión de von Mises en  $t=3,75e^{-2}$  ms para  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$



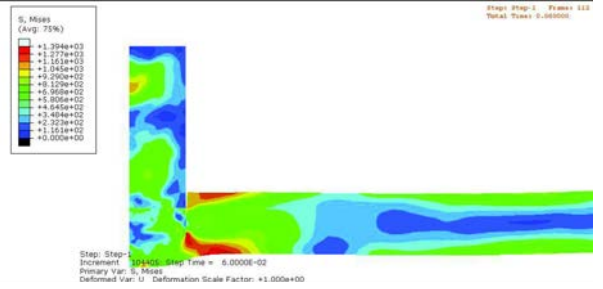
(c) Campo de tensión de von Mises en  $t=7,5e^{-3}$  ms para  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$



(d) Campo de tensión de von Mises en  $t=1,5e^{-2}$  ms para  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$



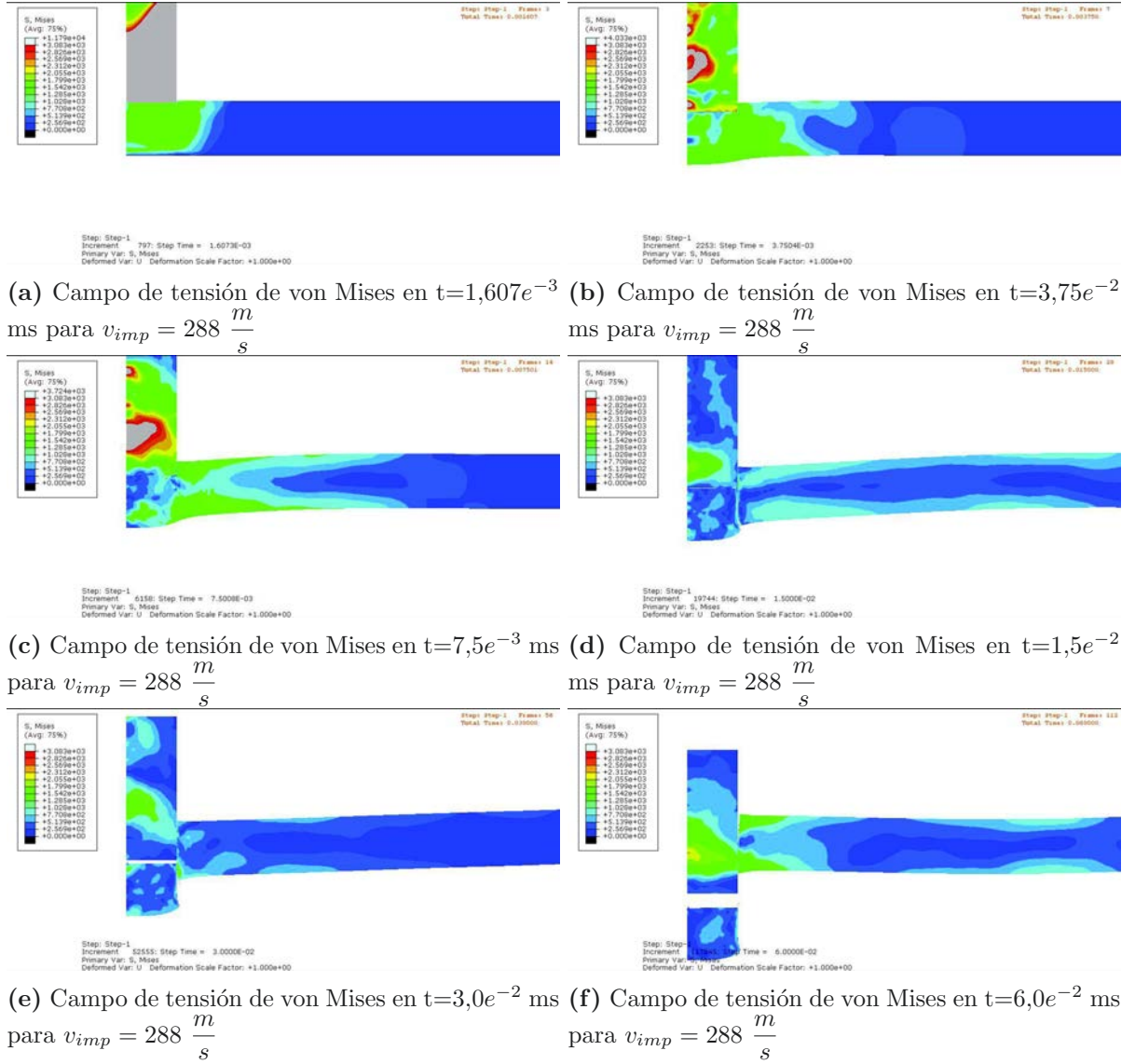
(e) Campo de tensión de von Mises en  $t=3,0e^{-2}$  ms para  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$



(f) Campo de tensión de von Mises en  $t=6,0e^{-2}$  ms para  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$

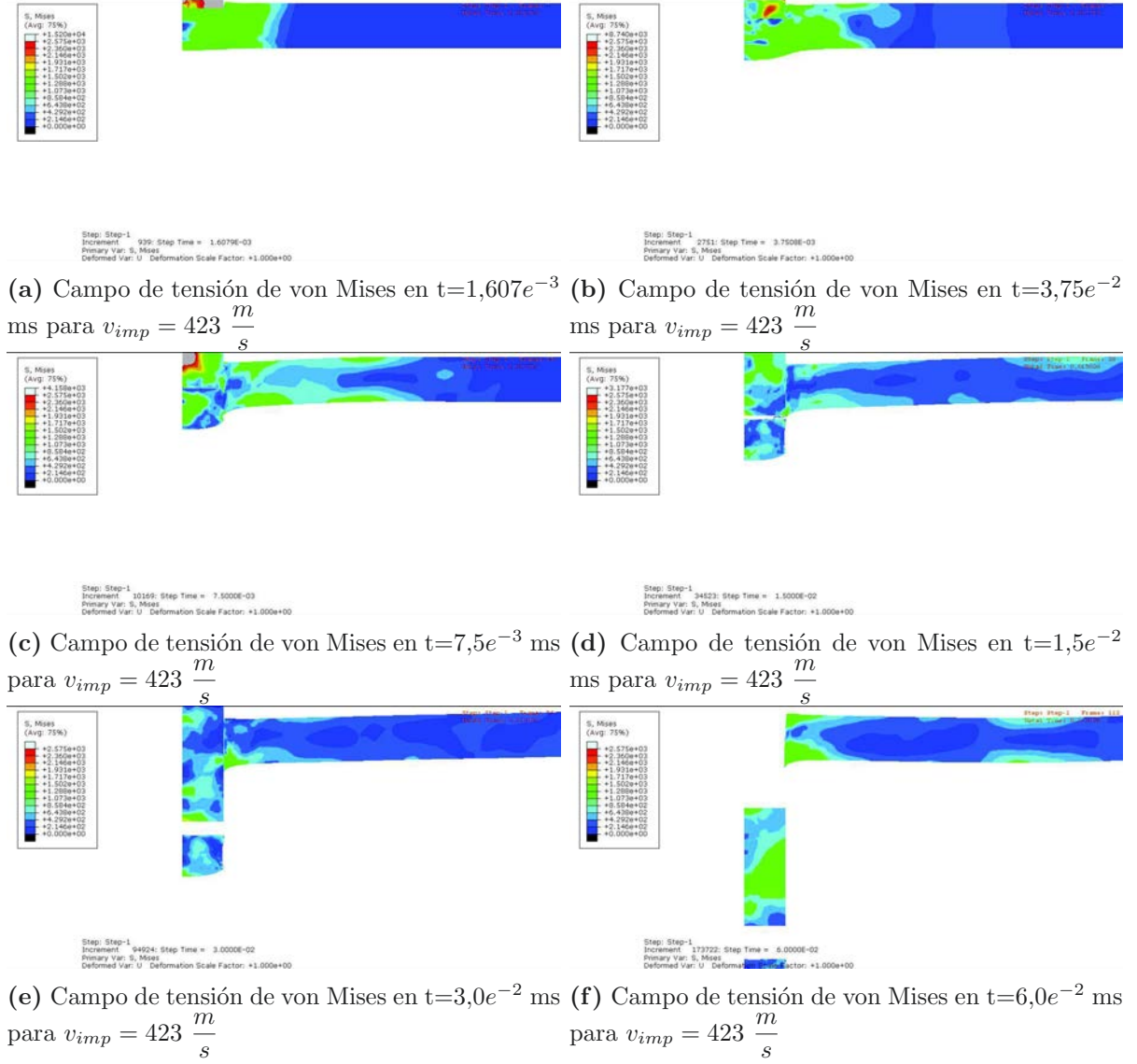
**Figura 6.12:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo basado en la máxima tensión de cortadura y para un valor de  $\tau_{max} = 740$  MPa.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.13:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo basado en la máxima tensión de cortadura y para un valor de  $\tau_{max} = 740$  MPa. En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6.5 Criterio II: Máxima tensión de cortadura



**Figura 6.14:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo basado en la máxima tensión de cortadura y para un valor de  $\tau_{max} = 740$  MPa. En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

### 6.6. Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh

Como se comentó en 2.4.5 Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh este criterio depende de un único parámetro  $D_{Oh}$ . Se ha realizado un barrido de dicho parámetro tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual para la velocidad de impacto  $v_{imp}=288$ . En la figura 6.15 se presenta la velocidad residual para diferentes velocidades de impacto en función del parámetro  $D_{Oh}$ . Se puede apreciar que en general la velocidad residual tiende a reducirse al crecer el valor de  $D_{Oh}$  hasta que para valores de  $D_{Oh}$  en el entorno de 13 la tendencia es a mantener valores de velocidad residual mas o menos constantes. Como en los casos anteriores esto es debido a que la temperatura en determinados elementos se ha elevado considerablemente y se ha aproximado a la temperatura de fusión  $T_m$  y a esas temperaturas la tensión de plastificación, según el modelo de Johnson Cook descrito en 3.4.2.2.1 Ecuación de Johnson Cook y conforme al modelo de consistencia, tiende a cero y por tanto dichos elementos no son capaces de soportar tensiones y en consecuencia son eliminados.

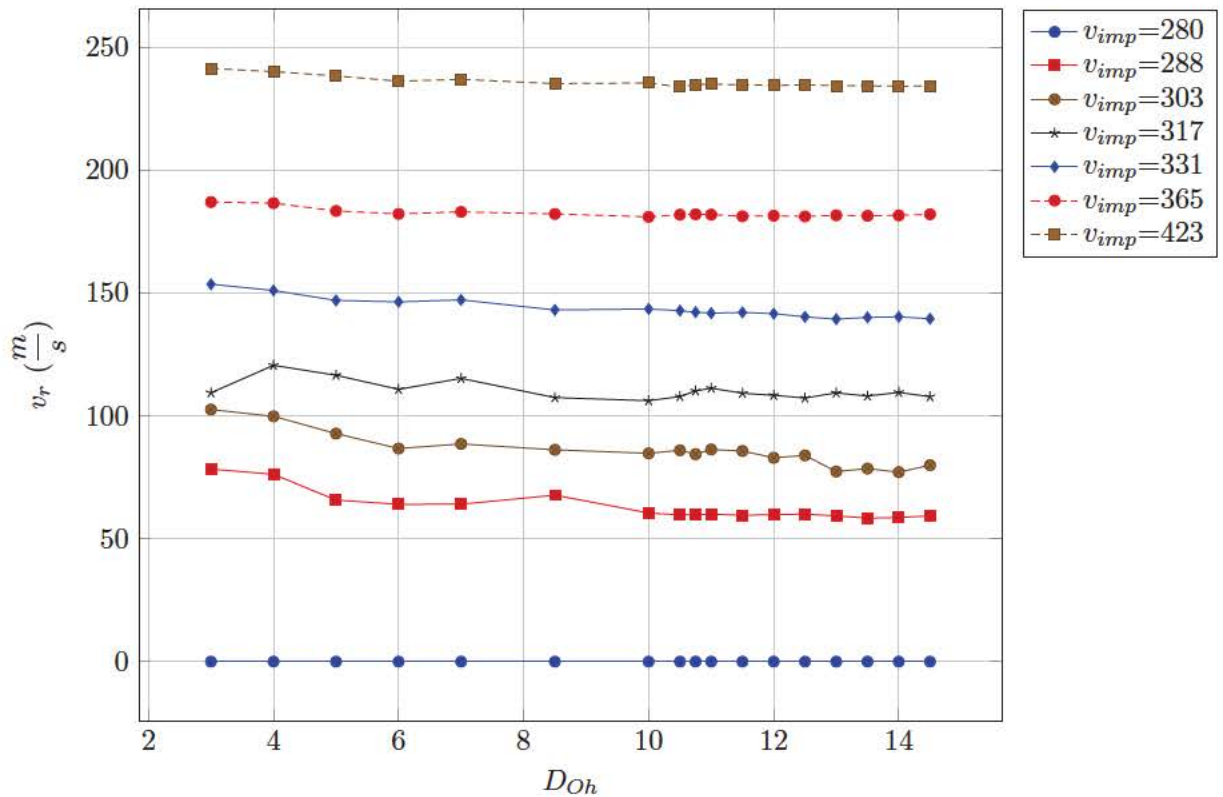
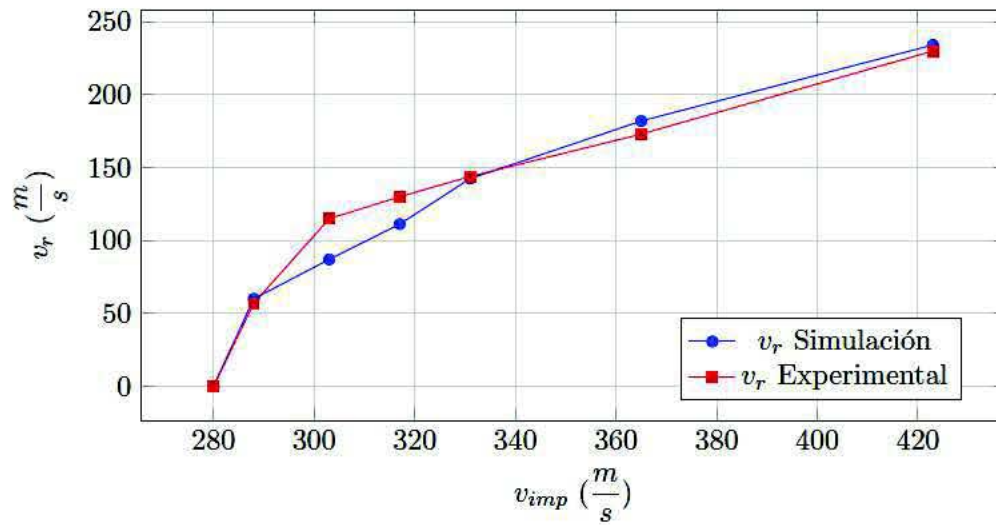


Figura 6.15: Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $D_{Oh}$



## 6.6 Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh

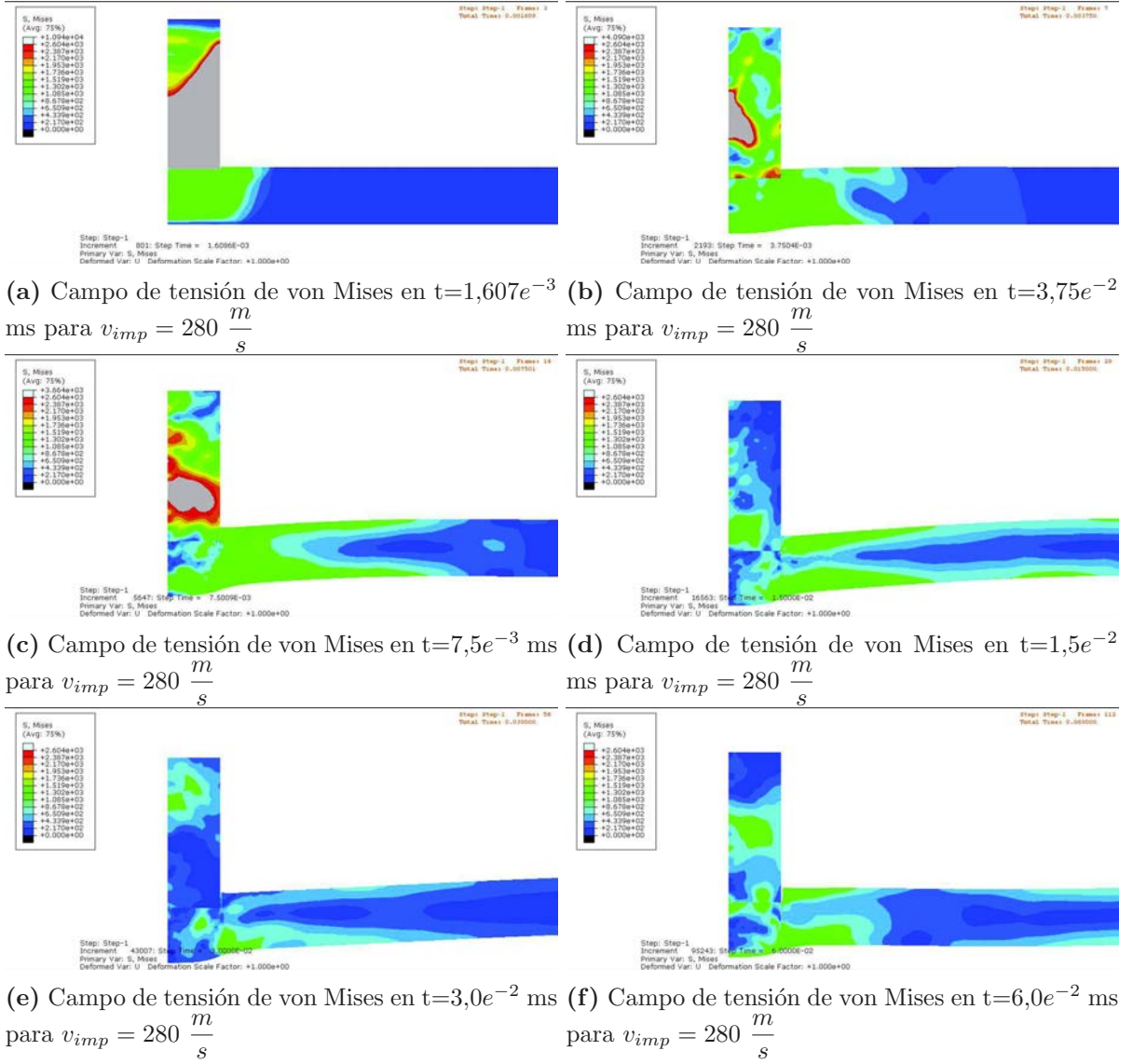
Del conjunto de parámetros probados para el ajuste de la curva velocidad residual ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) el que proporciona un mejor ajuste corresponde a  $D_{Oh} = 7$ . En la figura 6.16 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para este modelo de fallo.



**Figura 6.16:** Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh correspondiente a un valor de  $D_{Oh} = 7$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (24,3 % error) y 317 (14,4 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,2 %

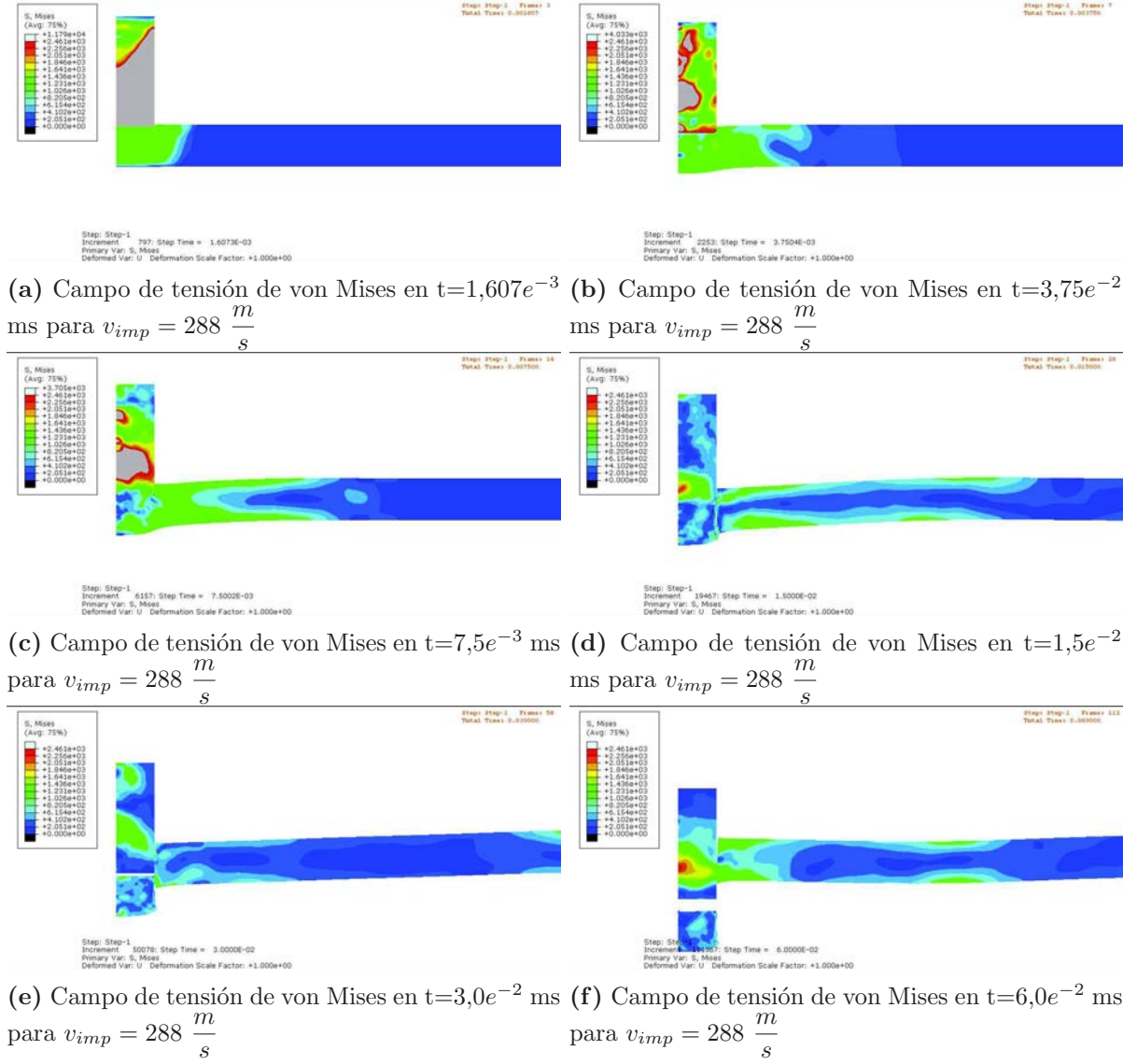
## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

En las figuras 6.17, 6.18 y 6.19 se puede ver que las simulaciones predicen para todas las velocidades de impacto un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



**Figura 6.17:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh y para un valor de  $\dot{D}_{Oh} = 7$ .

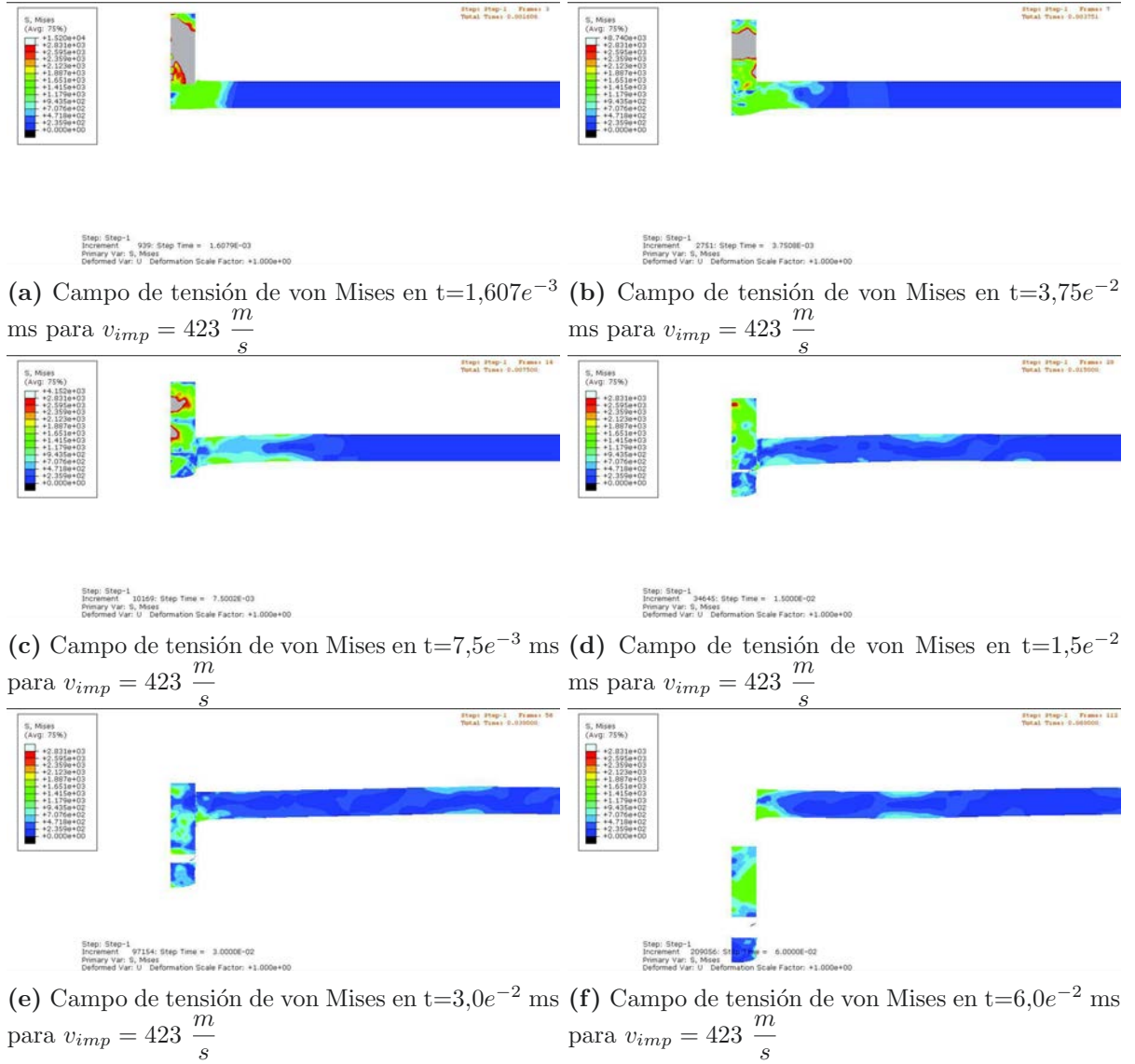
## 6.6 Criterio III: Modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh



**Figura 6.18:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh y para un valor de  $D_{Oh} = 7$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



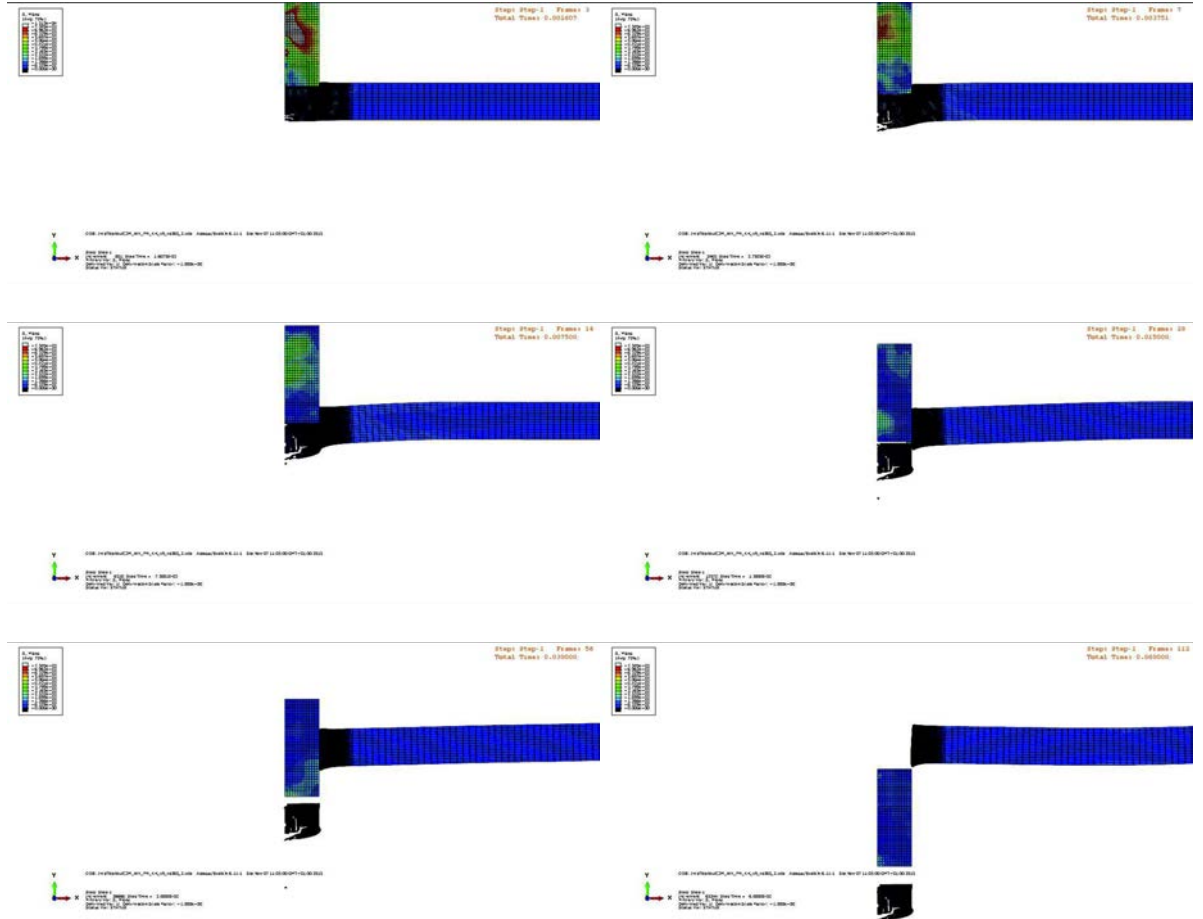
## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.19:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente al modelo de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh y para un valor de  $D_{Oh} = 7$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6.7. Criterio IV: Modelo de fallo de Wilkins

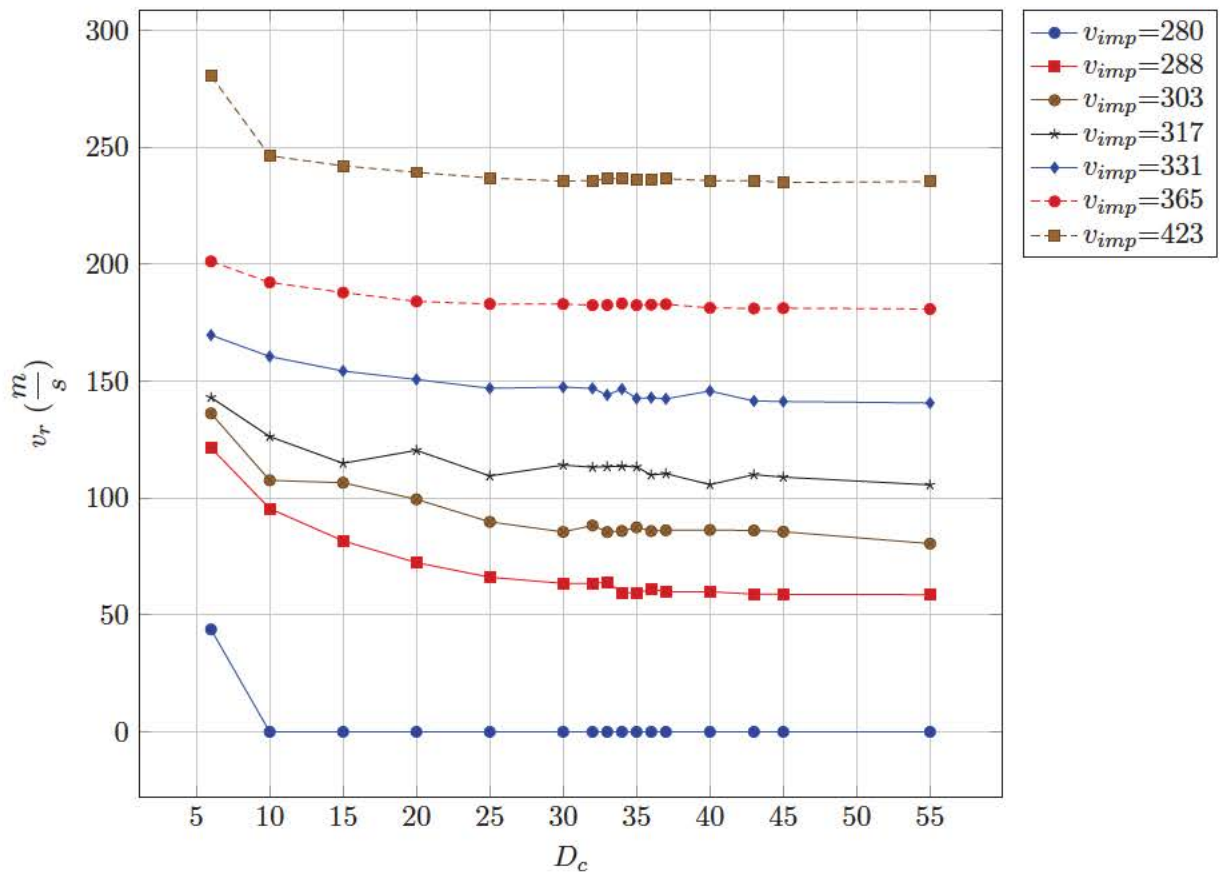
Como se comentó en 2.4.6 Criterio IV: Modelo de fallo de Wilkins este criterio depende de cuatro parámetros  $\sigma_{WK}$ ,  $a_{WK}$ ,  $b_{WK}$  y  $D_c$ . Se ha realizado un barrido de dichos parámetros tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual para las velocidades de impacto  $v_{imp}=288\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=331\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=365\frac{m}{m}$  y  $v_{imp}=423\frac{m}{s}$ . El barrido de dichos parámetros muestra que los parámetros más influyentes en el ajuste de las velocidades residuales son  $\sigma_{WK}$  y  $D_c$ . Para valores bajos del parámetro  $\sigma_{WK}$  el modelo de fallo de Wilkins predice la eyección de un tapón astillado (spalling) como se muestra en las figuras 6.20. Esto se debe a que el término 2.13 ( $w_1 = (1 + \frac{\sigma_H}{\sigma_{WK}})^{-a_{WK}}$ ) tiende a  $\infty$  y en consecuencia el integrando de 2.12 ( $D_c = \int_0^{p_f} w_1 w_2 dp$ ) muestra una asíntota vertical. Este fenómeno no se ha detectado en los ensayos experimentales.



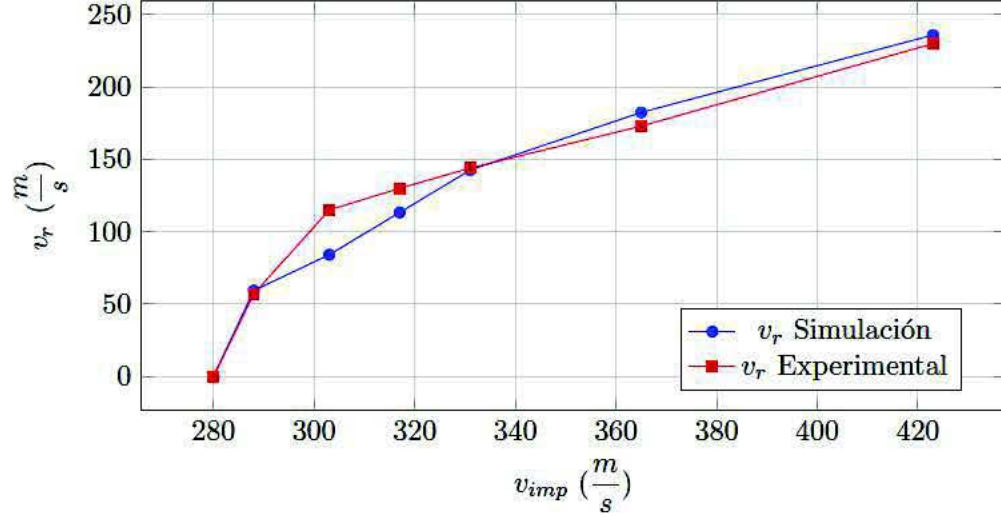
**Figura 6.20:** Evolución del astillamiento predicho por el modelo de fallo de wilkins para valores bajos del parámetro  $\sigma_{WK}$ . Los parámetros de esta simulación corresponden a  $\sigma_{WK} = 1500$  MPa,  $a_{WK} = 2$ ,  $b_{WK} = 2$  y  $D_c = 35$

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

En la figura 6.21 se presenta la velocidad residual para diferentes velocidades de impacto en función del parámetro  $D_c$ . Se puede apreciar que en general la velocidad residual tiende a reducirse al crecer el valor de  $D_c$  hasta que para valores de  $D_c$  en el entorno de 45 la tendencia es asintótica para mantener valores de velocidad residual mas o menos constantes. Como en los casos anteriores esto es debido a que la temperatura en determinados elementos se ha elevado considerablemente y se ha aproximado a la temperatura de fusión  $T_m$  y a esas temperaturas la tensión de plastificación, según el modelo de Johnson Cook descrito en 3.4.2.2.1 Ecuación de Johnson Cook y conforme al modelo de consistencia, tiende a cero y por tanto dichos elementos no son capaces de soportar tensiones y consecuentemente son eliminados.



**Figura 6.21:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $D_c$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Wilkins  $\sigma_{WK} = 3000$  MPa,  $a_{WK} = 2$ ,  $b_{WK} = 2$



**Figura 6.22:** Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Wilkins correspondiente a un valor de  $\sigma_{WK} = 3000 \text{ MPa}$ ,  $D_c = 35$ ,  $a_{WK} = 2$  y  $b_{WK} = 2$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (24 % error) y 317 (12,8 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,5 %.

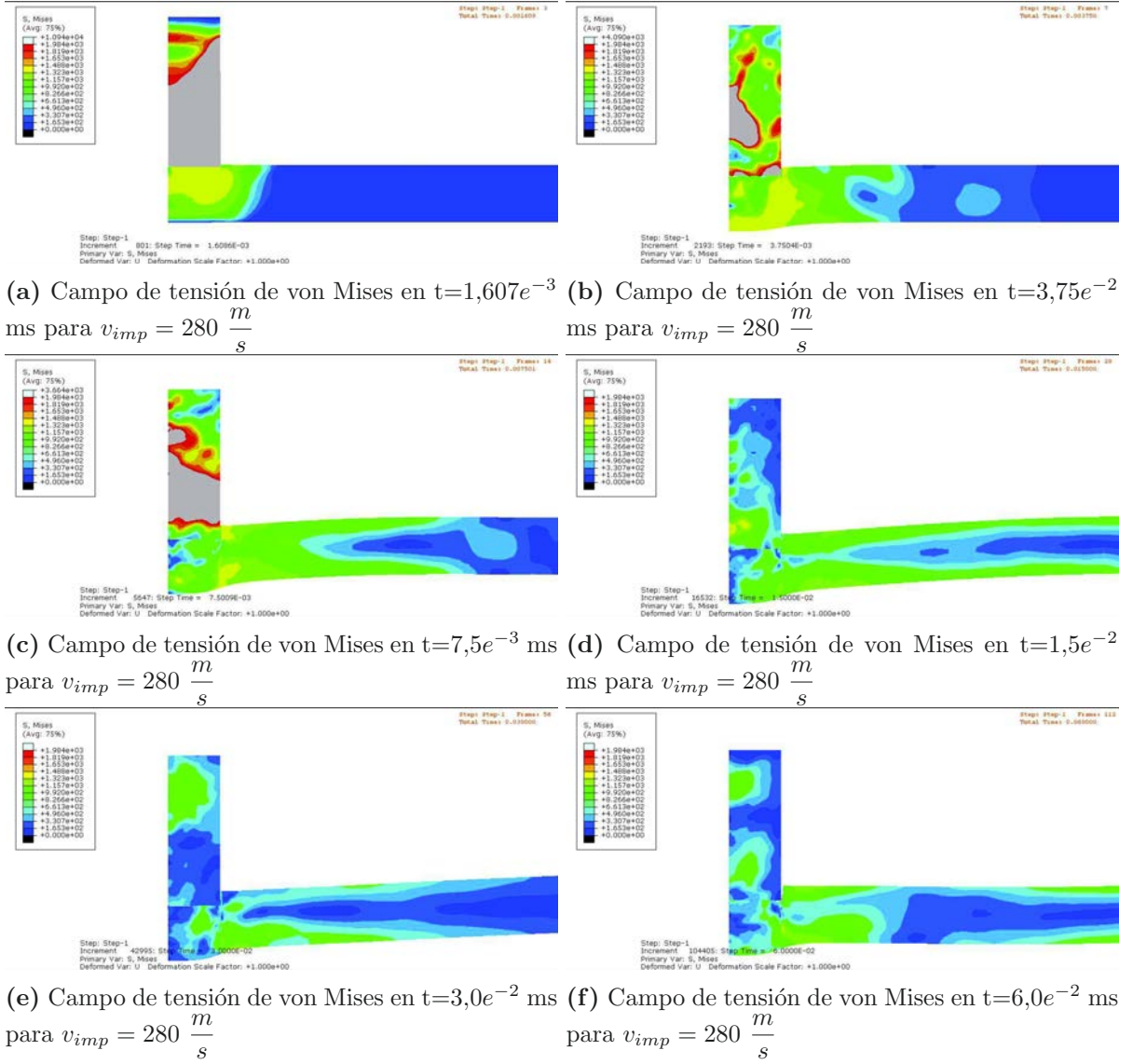
El conjunto de parámetros que mejor ajusta la curva velocidad de impacto-velocidad residual son los indicados en la tabla 6.2. En la figura 6.22 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para este modelo de fallo.

$\sigma_{WK} \text{ (Mpa)}$	$a_{WK}$	$b_{WK}$	$D_c$
3000	2	2	35

**Tabla 6.2:** Parámetros del criterio de fallo de Wilkins que mejor ajustan la curva velocidad de impacto - velocidad residual

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

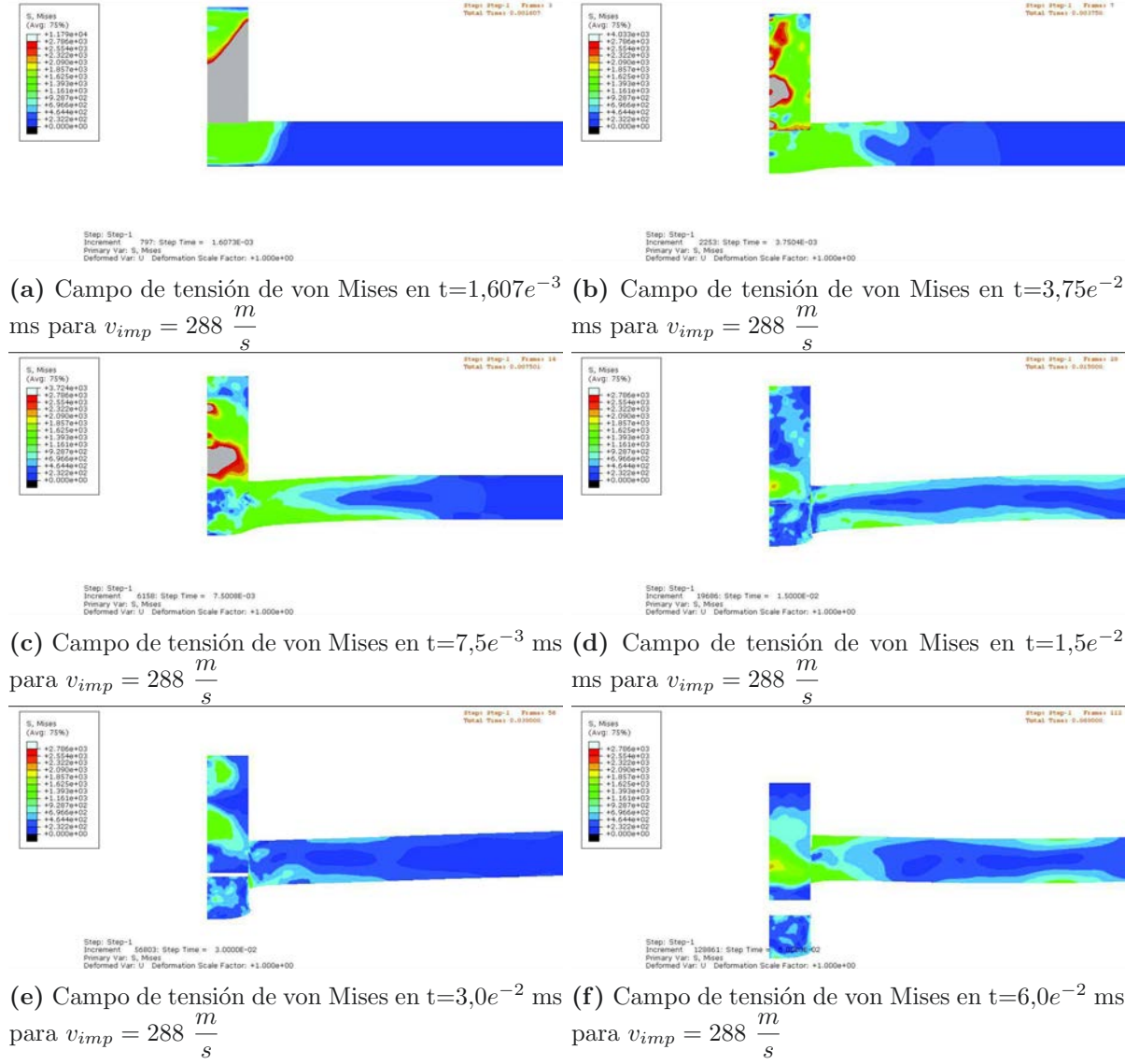
En las figuras 6.23, 6.24 y 6.25 se puede ver que las simulaciones predicen para todas las velocidades de impacto un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



**Figura 6.23:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente a los valores de los parámetros  $\sigma_{WK} = 3000MPa$ ,  $D_c = 35$ ,  $a_{WK} = 2$  y  $b_{WK} = 2$ .

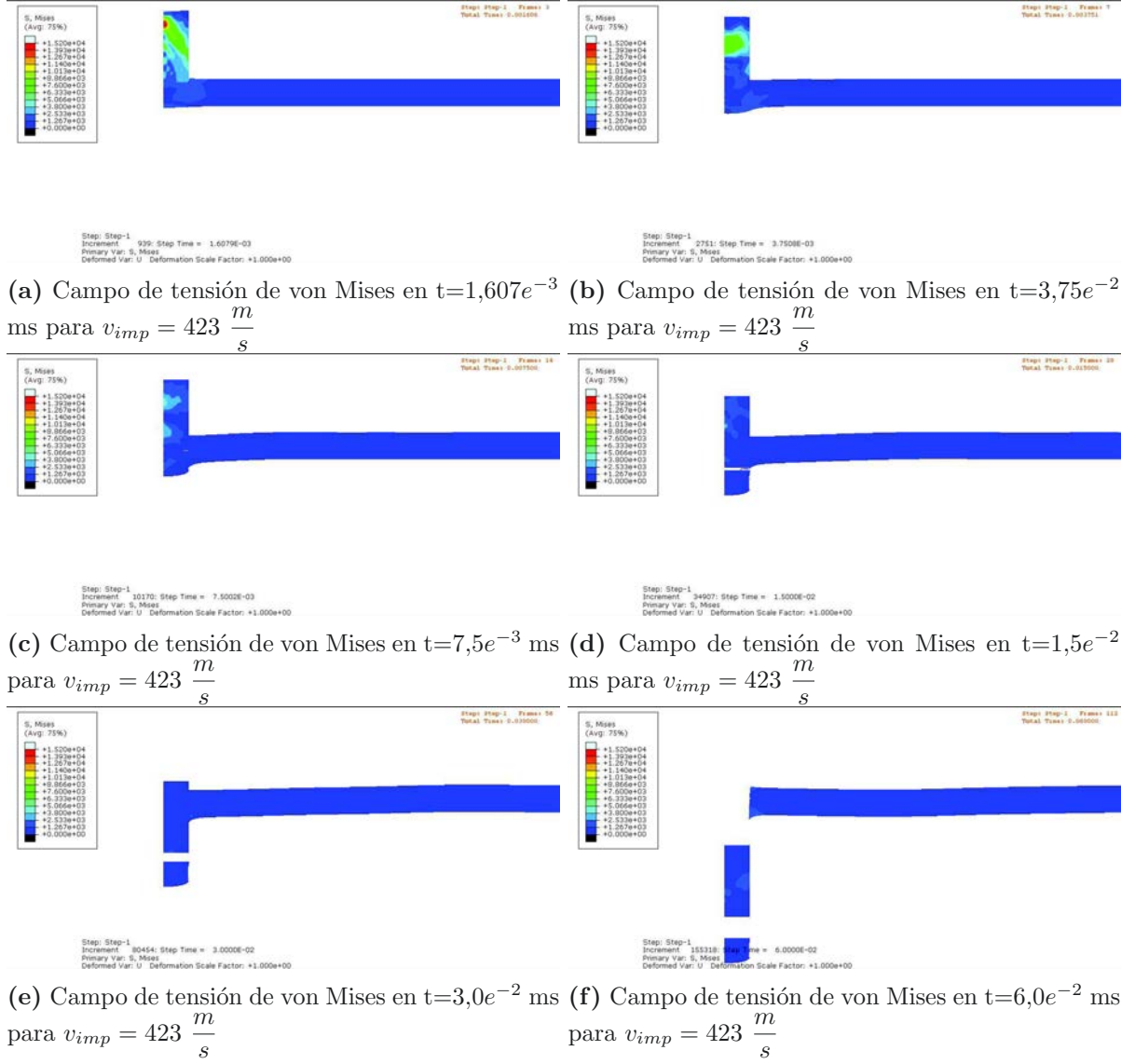


## 6.7 Criterio IV: Modelo de fallo de Wilkins



**Figura 6.24:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente a los valores de los parámetros  $\sigma_{WK} = 3000 MPa$ ,  $D_c = 35$ ,  $a_{WK} = 2$  y  $b_{WK} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

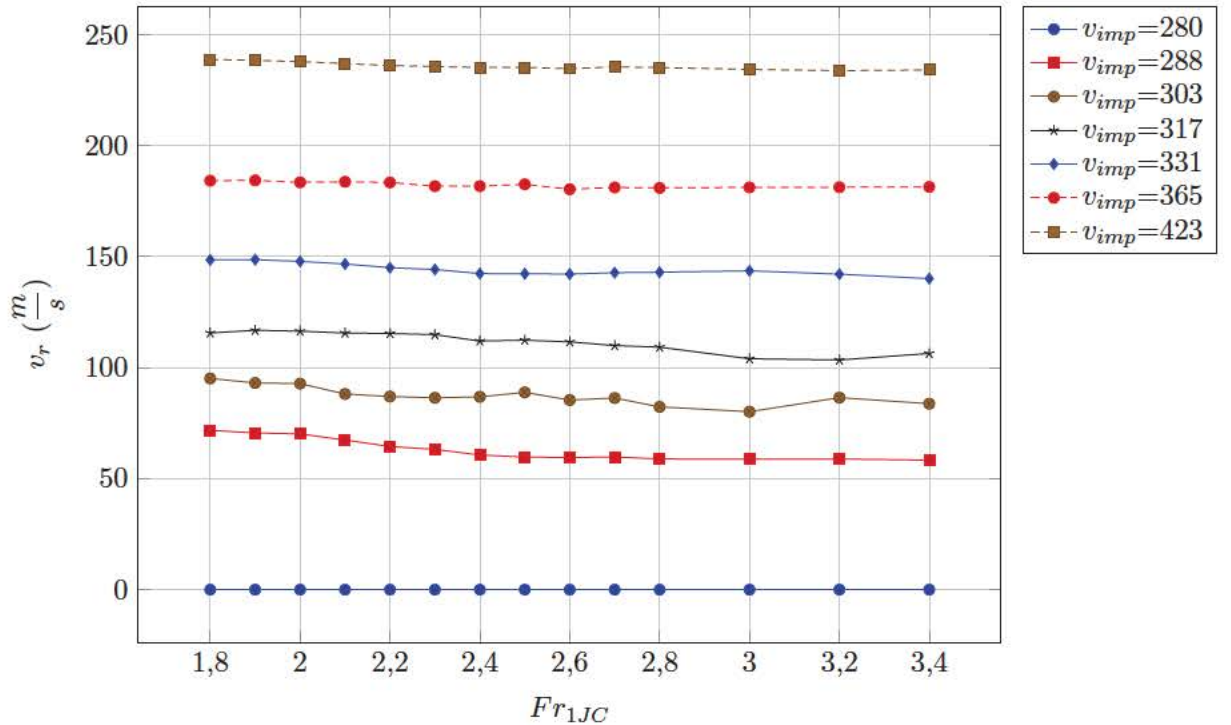


**Figura 6.25:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente a los valores de los parámetros  $\sigma_{WK} = 3000 MPa$ ,  $D_c = 35$ ,  $a_{WK} = 2$  y  $b_{WK} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6.8. Criterio V: Modelo de fallo de Johnson - Cook

Como se comentó en 2.4.7 Criterio V: Modelo de fallo de Johnson - Cook este criterio depende de cinco parámetros  $Fr_{1JC}$  a  $Fr_{5JC}$ . Se ha realizado un barrido de dichos parámetros tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual para las velocidades de impacto  $v_{imp}=288\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=317\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=331\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=365\frac{m}{s}$  y  $v_{imp}=423\frac{m}{s}$ . El barrido de dichos parámetros muestra que el parámetro más influyente en el ajuste de las velocidades residuales es  $Fr_{1JC}$ .

En la figura 6.26 se muestra la influencia del parámetro  $Fr_{1JC}$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como era de esperar, para valores crecientes de este parámetro las velocidades residuales decrecen. Este efecto es más apreciable a velocidades de impacto bajas en las que puede llegar a haber una reducción de la velocidad residual de casi el 20 % en el rango de valores del parámetro  $Fr_{1JC}$  analizado mientras que para velocidades de impacto altas la reducción de velocidad residual es del orden del 2 %.



**Figura 6.26:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $Fr_{1JC}$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook  $Fr_{2JC} = 1.55$ ,  $Fr_{3JC} = -1.45$ ,  $Fr_{4JC} = 0.0175$  y  $Fr_{5JC} = 0.125$



## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

En la figura 6.27 se muestra la influencia del parámetro  $Fr_{3JC}$  sobre la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Se puede apreciar que este parámetro en el rango de valores considerado apenas tiene influencia en las velocidades residuales para el conjunto de velocidades de impacto simuladas.

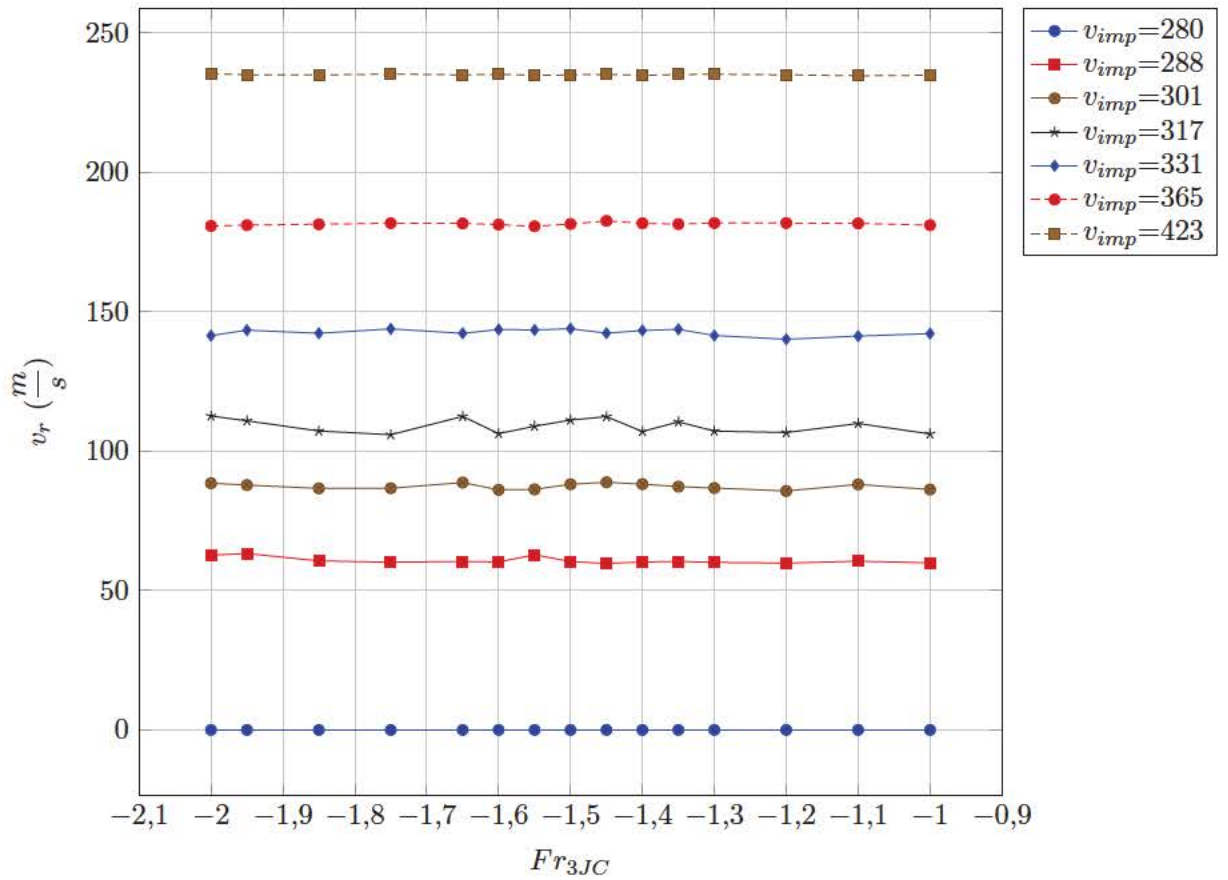
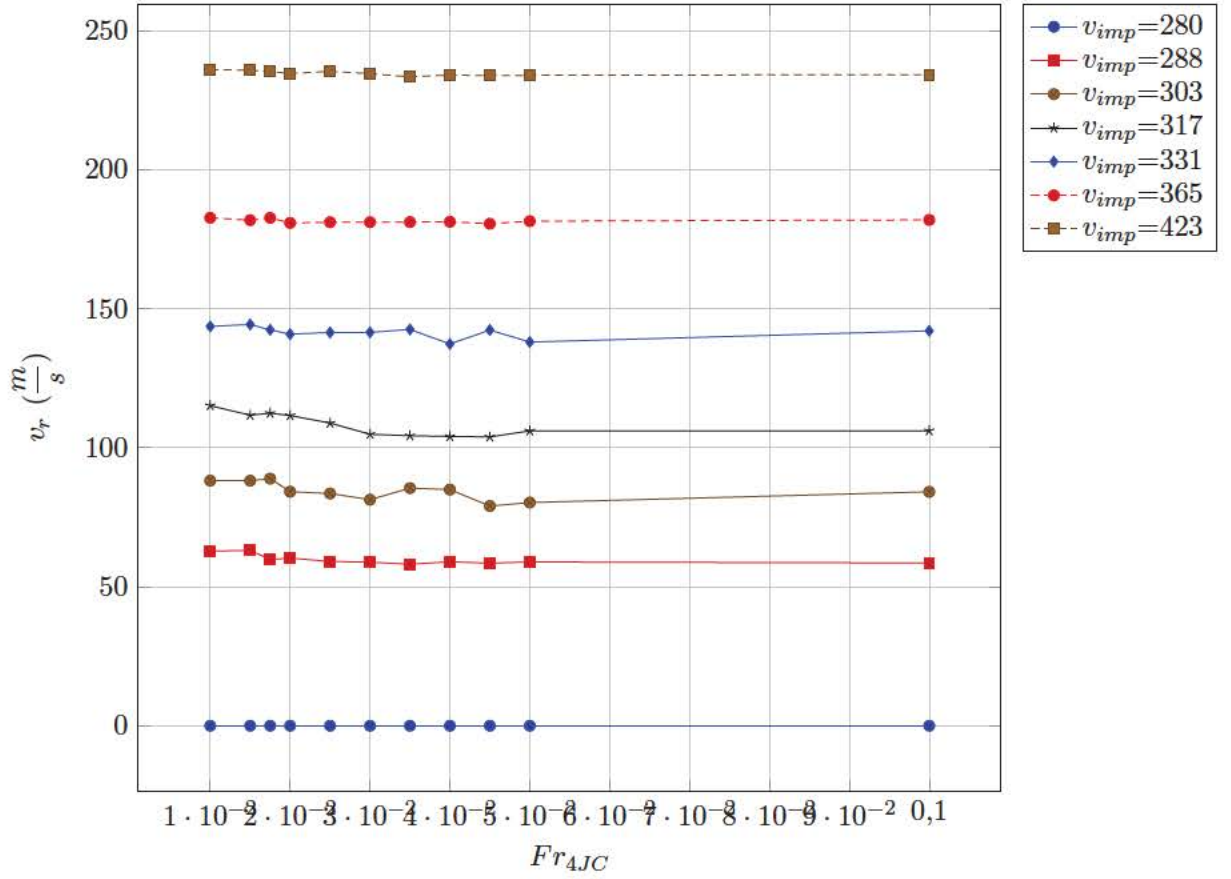


Figura 6.27: Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $Fr_{3JC}$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook  $Fr_{1JC} = 2.5$ ,  $Fr_{2JC} = 1.55$ ,  $Fr_{4JC} = 0.0175$  y  $Fr_{5JC} = 0.125$

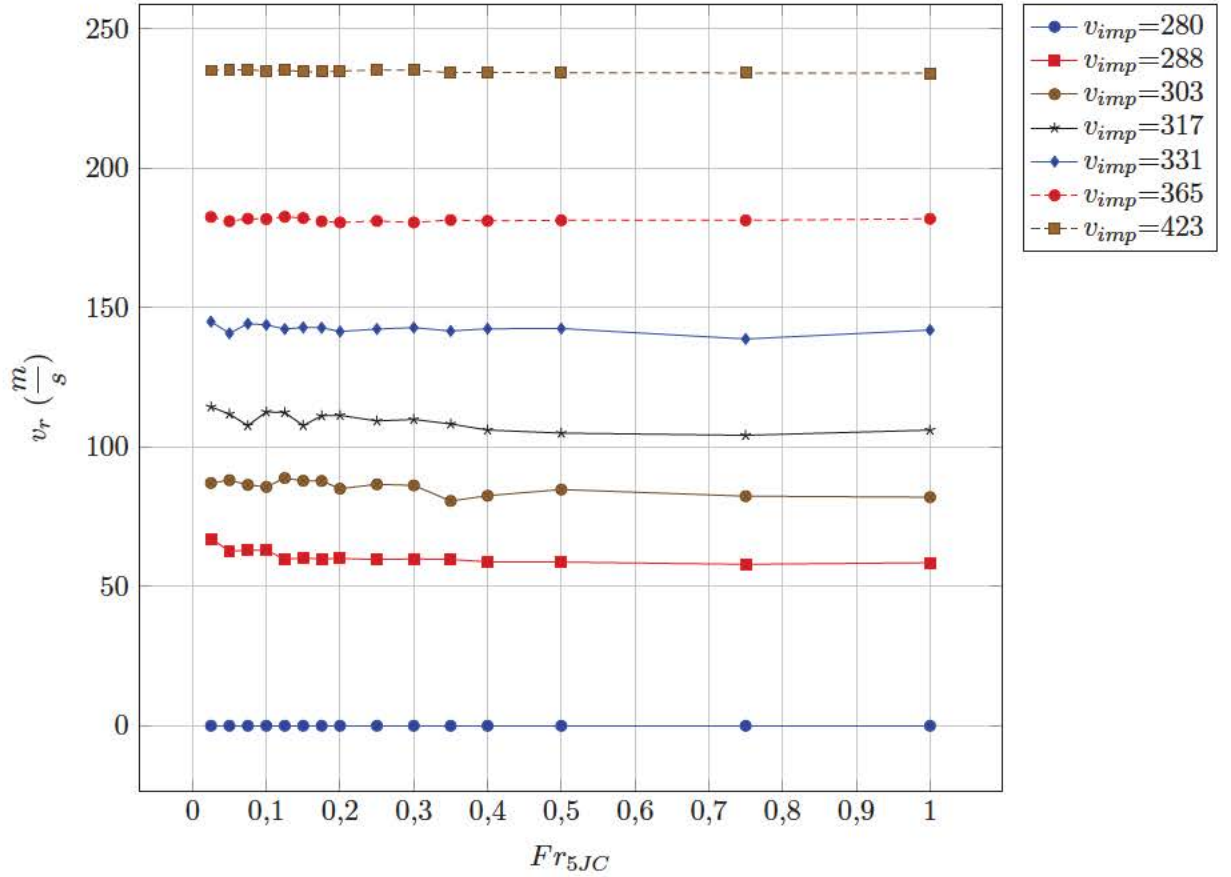
En la figura 6.28 se muestra la influencia del parámetro  $Fr_{4JC}$  sobre la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Se puede apreciar que este parámetro en el rango de valores considerado apenas tiene influencia en las velocidades residuales para el conjunto de velocidades de impacto simuladas. De manera que la influencia de la velocidad de deformación es escasa en la evolución del deterioro del Ti 6Al-4V.



**Figura 6.28:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $Fr_{4JC}$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook  $Fr_{1JC}=2.5$ ,  $Fr_{2JC}=1.55$ ,  $Fr_{3JC}=-1.45$  y  $Fr_{5JC}=0.125$ .

En la figura 6.29 se muestra la influencia del parámetro  $Fr_{5JC}$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como era de esperar, para valores crecientes de este parámetro las velocidades residuales decrecen. Este efecto es mas apreciable a velocidades de impacto bajas en las que puede llegar a haber una reducción de la velocidad residual de casi el 15% en el rango de valores del parámetro  $Fr_{5JC}$  analizado mientras que para velocidades de impacto altas la reducción de velocidad residual es inferior al 2% en la mayoría de los casos. De manera que la temperatura puede considerarse como un factor relevante en la evolución del deterioro del Ti 6Al-4V a bajas velocidades de impacto.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



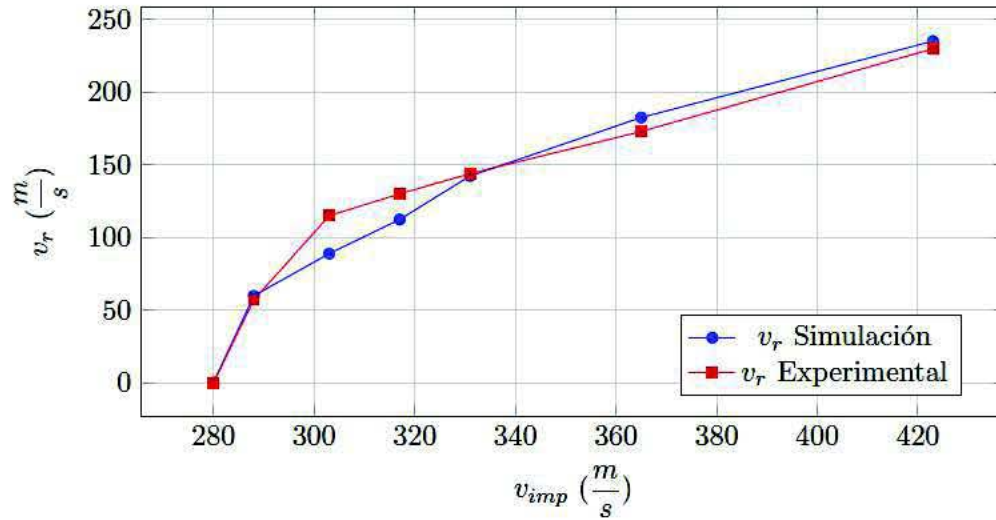
**Figura 6.29:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $Fr_{5JC}$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Johnson-Cook  $Fr_{1JC} = 2.5$ ,  $Fr_{2JC} = 1.55$ ,  $Fr_{3JC} = -1.45$  y  $Fr_{4JC} = 0.0175$ .

El conjunto de parámetros que mejor ajusta la curva velocidad de impacto-velocidad residual son los indicados en la tabla 6.3. En la figura 6.30 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para este modelo de fallo.

$Fr_{1JC}$	$Fr_{2JC}$	$Fr_{3JC}$	$Fr_{4JC}$	$Fr_{5JC}$
2.5	1.55	-1.45	0.0175	0.125

**Tabla 6.3:** Parámetros del criterio de fallo de Johnson - Cook que mejor ajustan la curva velocidad de impacto - velocidad residual

Dichos parámetros solo han permitido ajustar de forma razonable las velocidades residuales para las velocidades de impacto  $v_{imp}=288\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=331\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=365\frac{m}{s}$  y  $v_{imp}=423\frac{m}{s}$ . La velocidad residual para  $v_{imp}=317\frac{m}{s}$  no se ha podido ajustar en el rango de parámetros considerados.

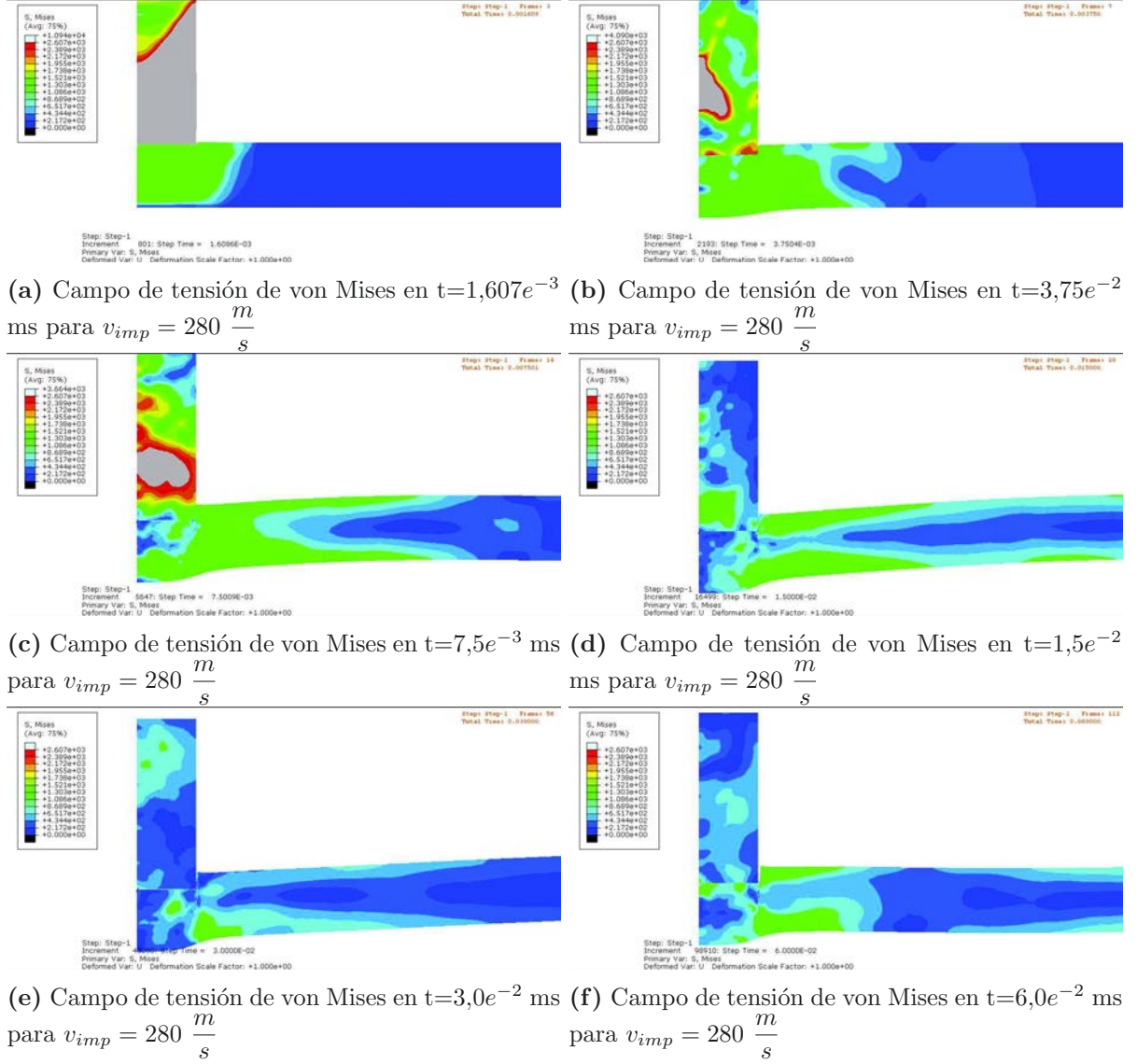


**Figura 6.30:** Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Johnson - Cook correspondiente a un valor de  $Fr_{1JC} = 2.5$ ,  $Fr_{2JC} = 1.55$ ,  $Fr_{3JC} = -1.45$ ,  $Fr_{4JC} = 0.0175$  y  $Fr_{5JC} = 0.125$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (22,7% error) y 317 (13,5% error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,6%.



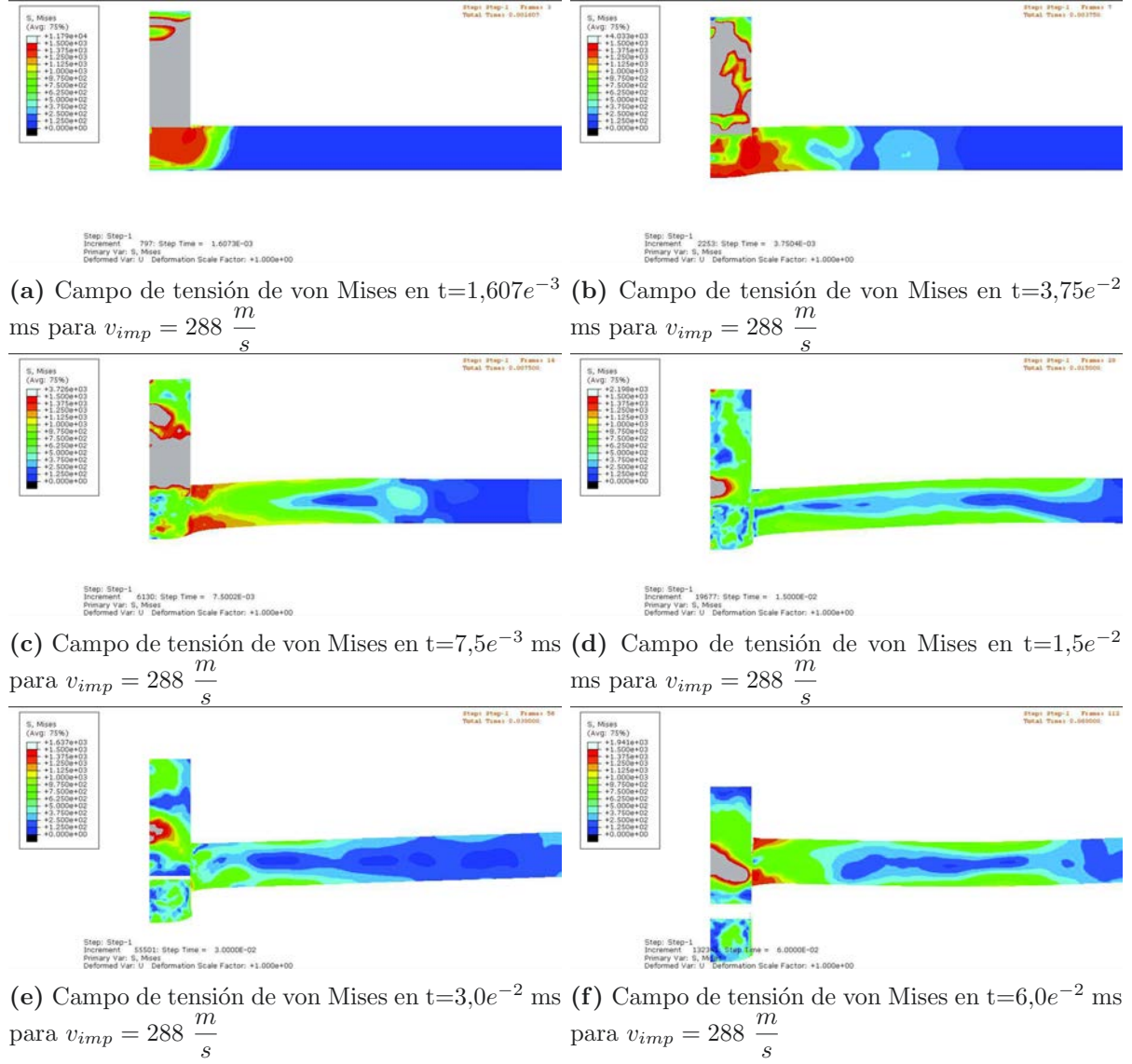
## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

En las figuras 6.31, 6.32 y 6.33 se puede ver que las simulaciones predicen para todas las velocidades de impacto un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



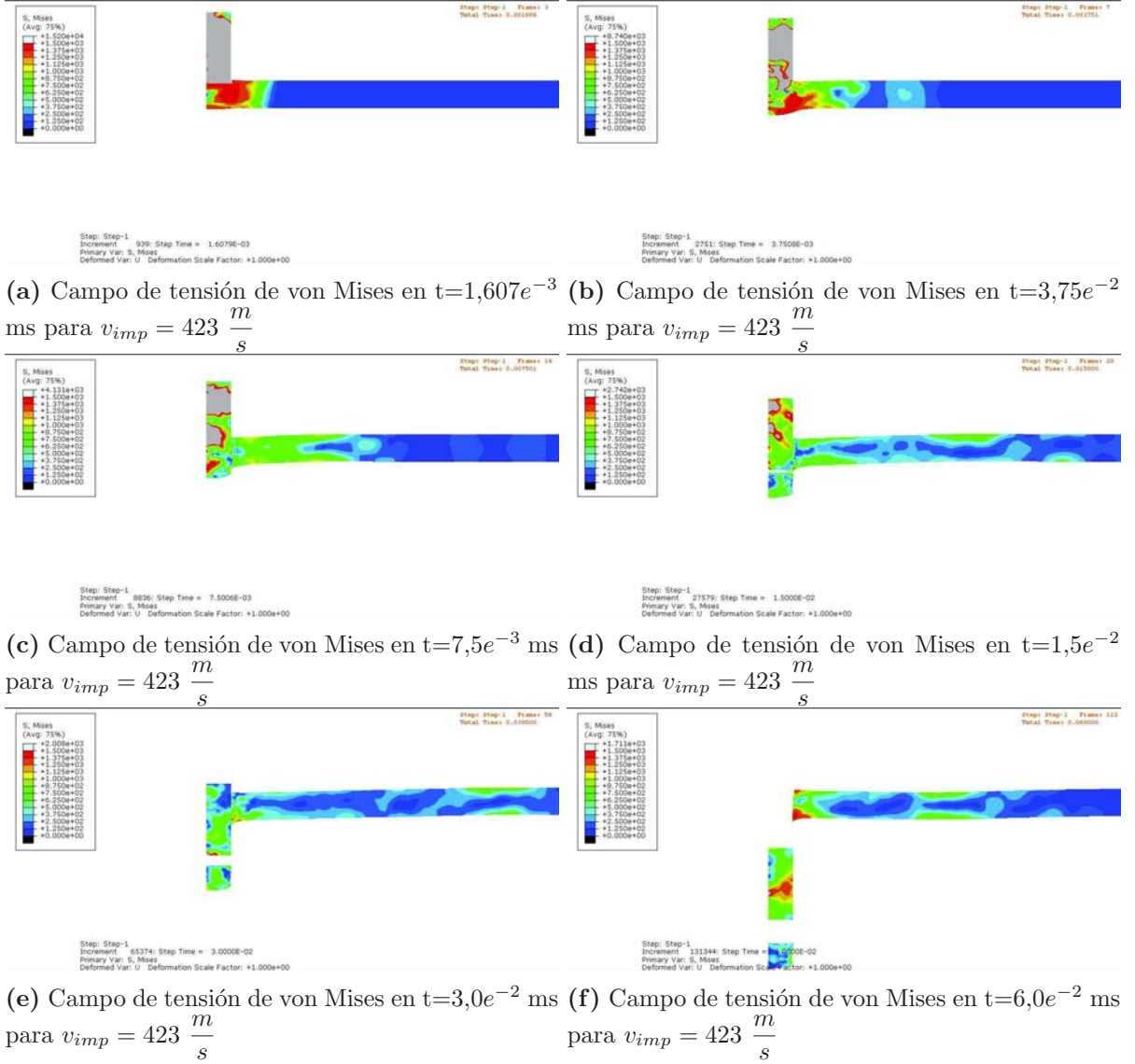
**Figura 6.31:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente a un valor de  $Fr_{1JC} = 2.5$ ,  $Fr_{2JC} = 1.55$ ,  $Fr_{3JC} = -1.45$ ,  $Fr_{4JC} = 0.0175$  y  $Fr_{5JC} = 0.125$ .

## 6.8 Criterio V: Modelo de fallo de Johnson - Cook



**Figura 6.32:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente a un valor de  $Fr_{1JC}=2.5$ ,  $Fr_{2JC}=1.55$ ,  $Fr_{3JC}=-1.45$ ,  $Fr_{4JC}=0.0175$  y  $Fr_{5JC}=0.125$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

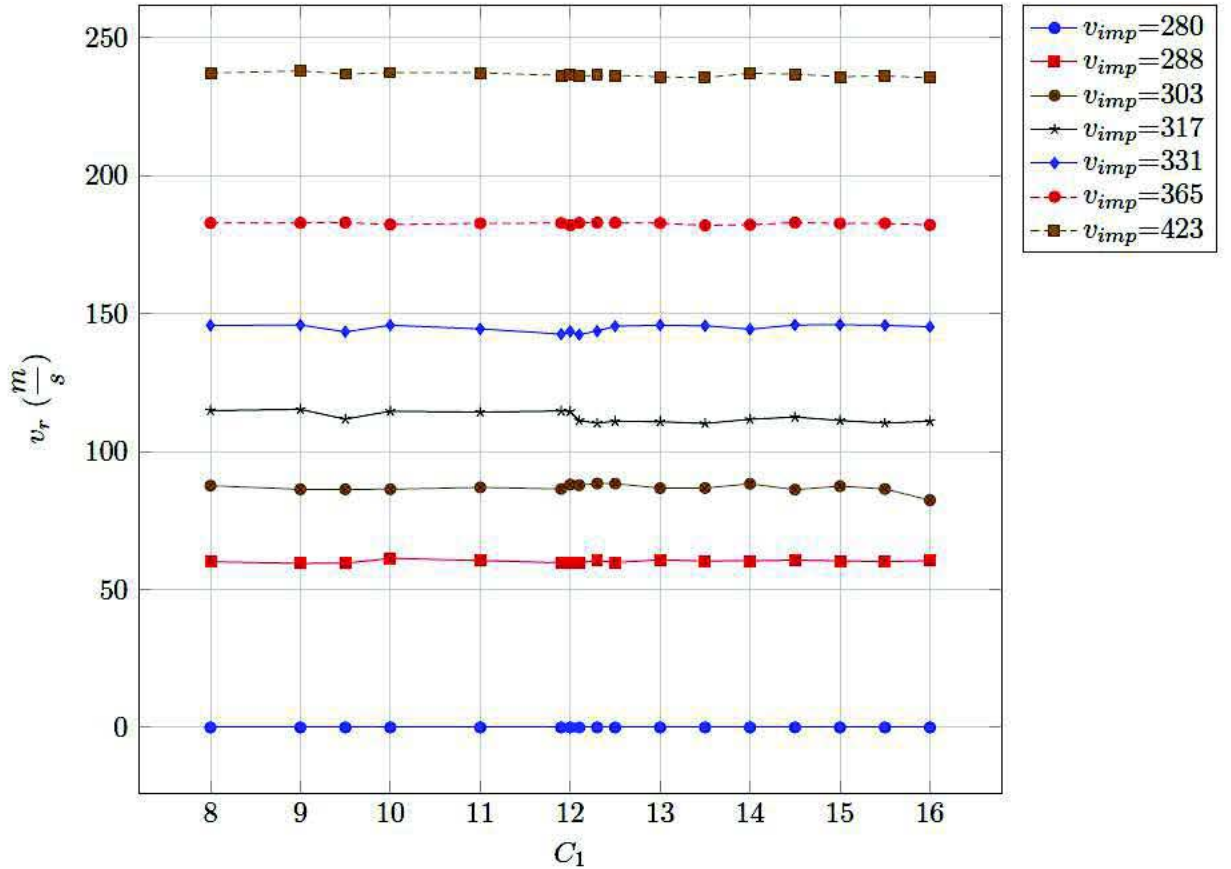


**Figura 6.33:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente a un valor de  $Fr_{1JC} = 2.5$ ,  $Fr_{2JC} = 1.55$ ,  $Fr_{3JC} = -1.45$ ,  $Fr_{4JC} = 0.0175$  y  $Fr_{5JC} = 0.125$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

### 6.9. Criterio VI: Modelo de fallo de Xue - Wierzbicki

Como se comentó en 2.4.8 Criterio VI: Modelo de fallo de Xue - Wierzbicki este criterio depende de cuatro parámetros  $C_1$  a  $C_4$  además del parámetro  $m_{XW}$  que debe ser un número par relacionado con el parámetro de endurecimiento  $n_{JC}$  de la ecuación de Johnson-Cook de manera que  $m_{XW}$  es el número par más próximo a  $\frac{1}{n_{JC}}$ . Se ha realizado un barrido de dichos parámetros tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual para las velocidades de impacto  $v_{imp}=288\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=331\frac{m}{s}$ ,  $v_{imp}=365\frac{m}{s}$  y  $v_{imp}=423\frac{m}{s}$ .

En la figura 6.34 se muestra la influencia del parámetro  $C_1$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar la influencia de este parámetro es poco relevante en el rango de valores considerados y para todas las velocidades de impacto evaluadas.

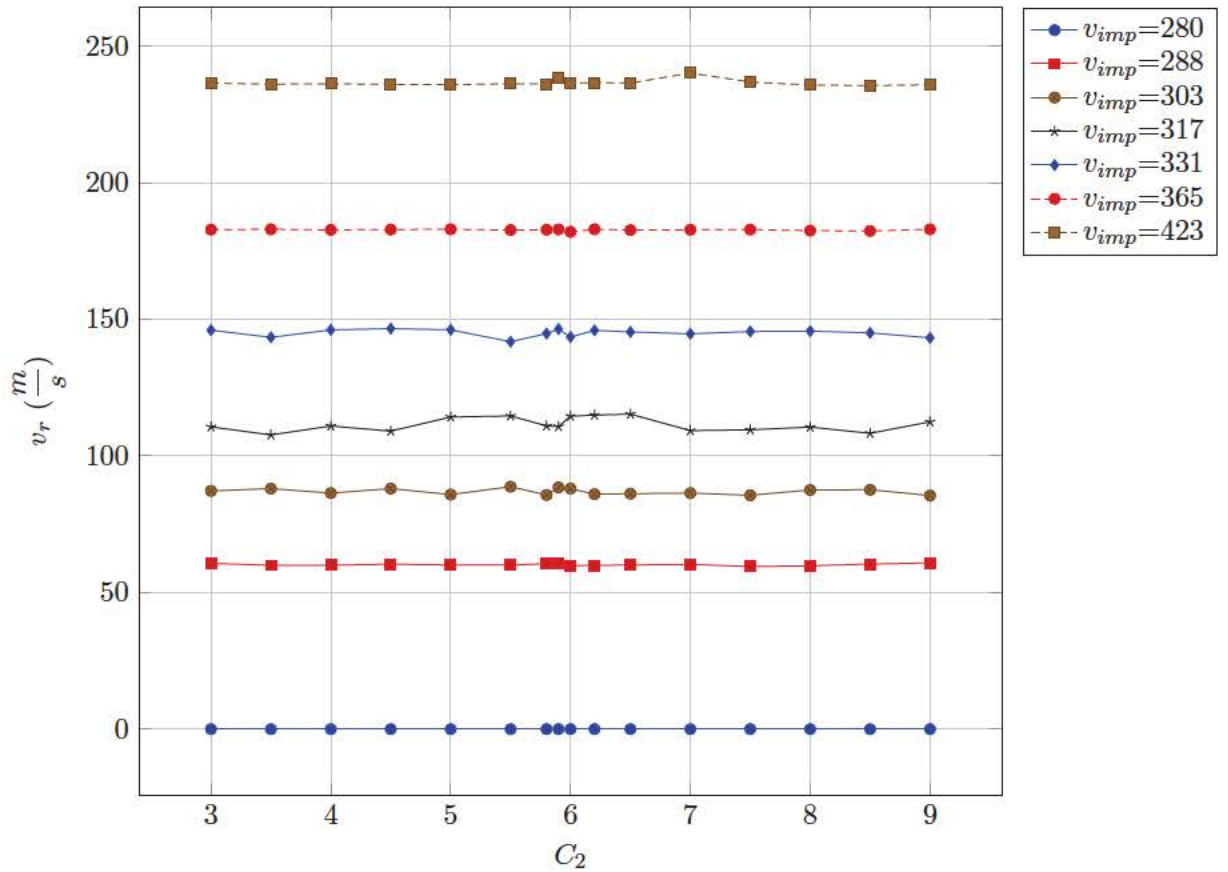


**Figura 6.34:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $C_1$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 6,5$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$



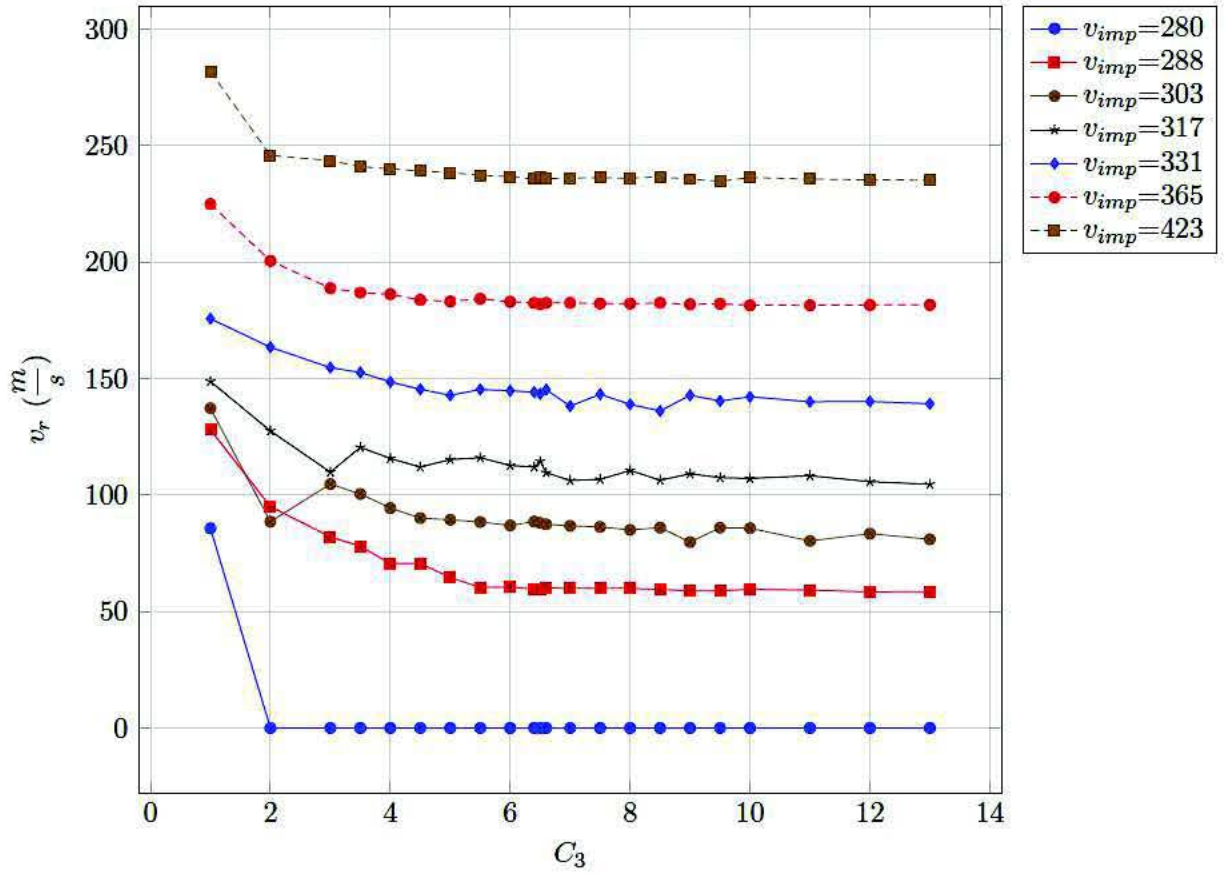
## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

En la figura 6.35 se muestra la influencia del parámetro  $C_2$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar la influencia de este parámetro es poco relevante en el rango de valores considerados y para todas las velocidades de impacto evaluadas.



**Figura 6.35:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $C_2$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki  $C_1 = 12$ ,  $C_3 = 6,5$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$

En la figura 6.36 se muestra la influencia del parámetro  $C_3$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar este parámetro tiene una influencia considerable en la velocidad residual para todas las velocidades de impacto. Para valores crecientes la velocidad residual decrece de manera asintótica de manera que para valores grandes del parámetro  $C_3$  la velocidad residual apenas varía.



**Figura 6.36:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $C_3$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki  $C_1 = 12$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$

En la figura 6.37 se muestra la influencia del parámetro  $C_4$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar este parámetro tiene una influencia considerable en la velocidad residual para todas las velocidades de impacto. Para valores crecientes la velocidad residual también crece de manera casi lineal.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

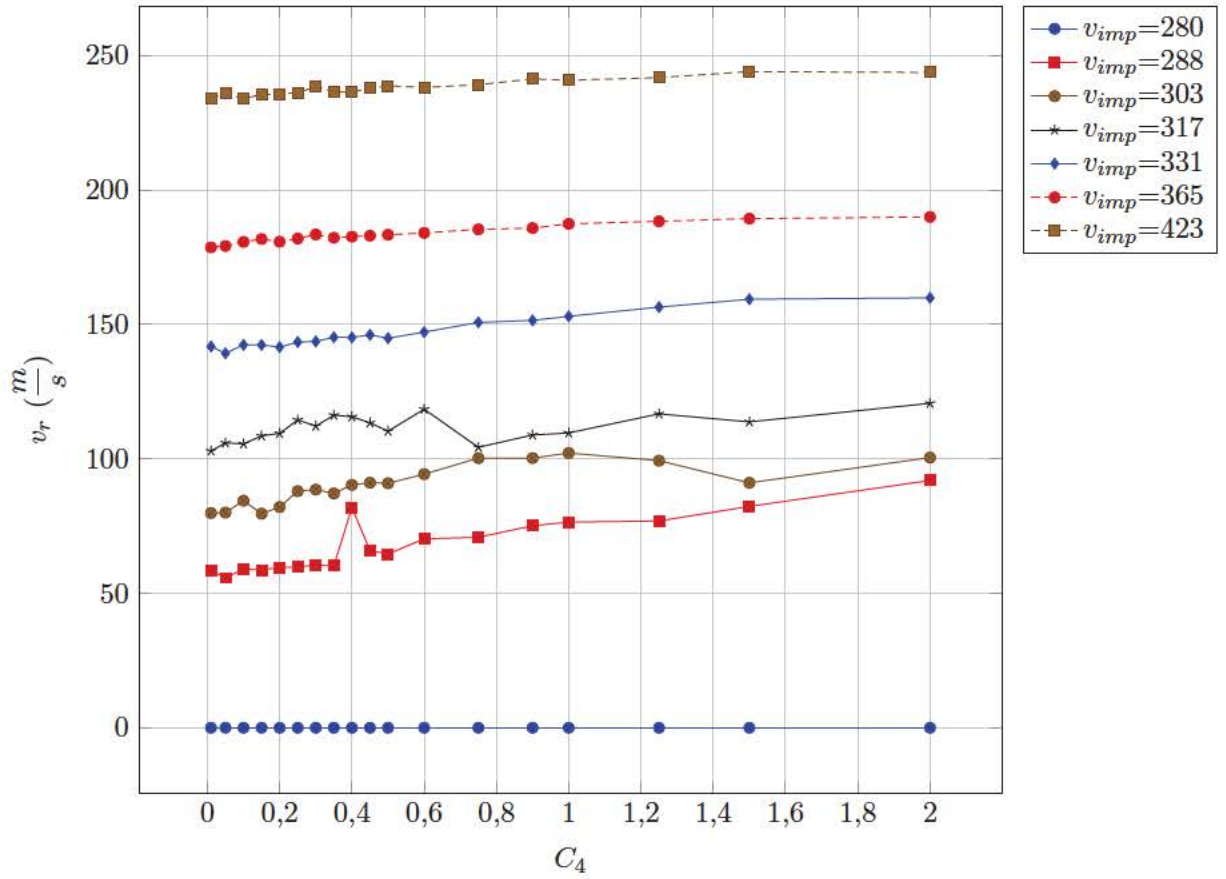
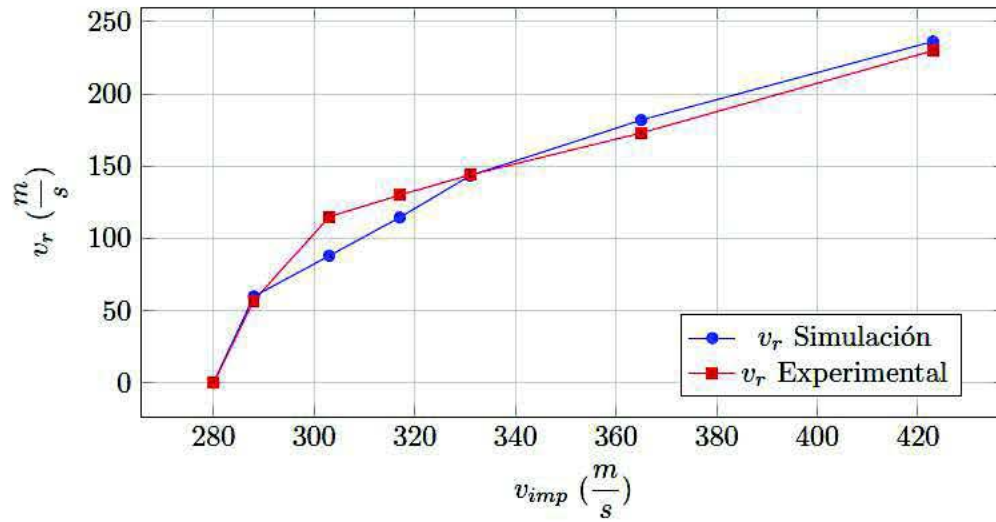


Figura 6.37: Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $C_4$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki  $C_1 = 12$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 6,5$  y  $m_{XW} = 2$

El conjunto de parámetros que mejor ajusta la curva velocidad de impacto-velocidad residual son los indicados en la tabla 6.4. En la figura 6.38 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para este modelo de fallo.

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$m_{XW}$
12	6	6.5	0.25	2

Tabla 6.4: Parámetros del criterio de fallo de Xue - Wierzbicki que mejor ajustan la curva velocidad de impacto - velocidad residual

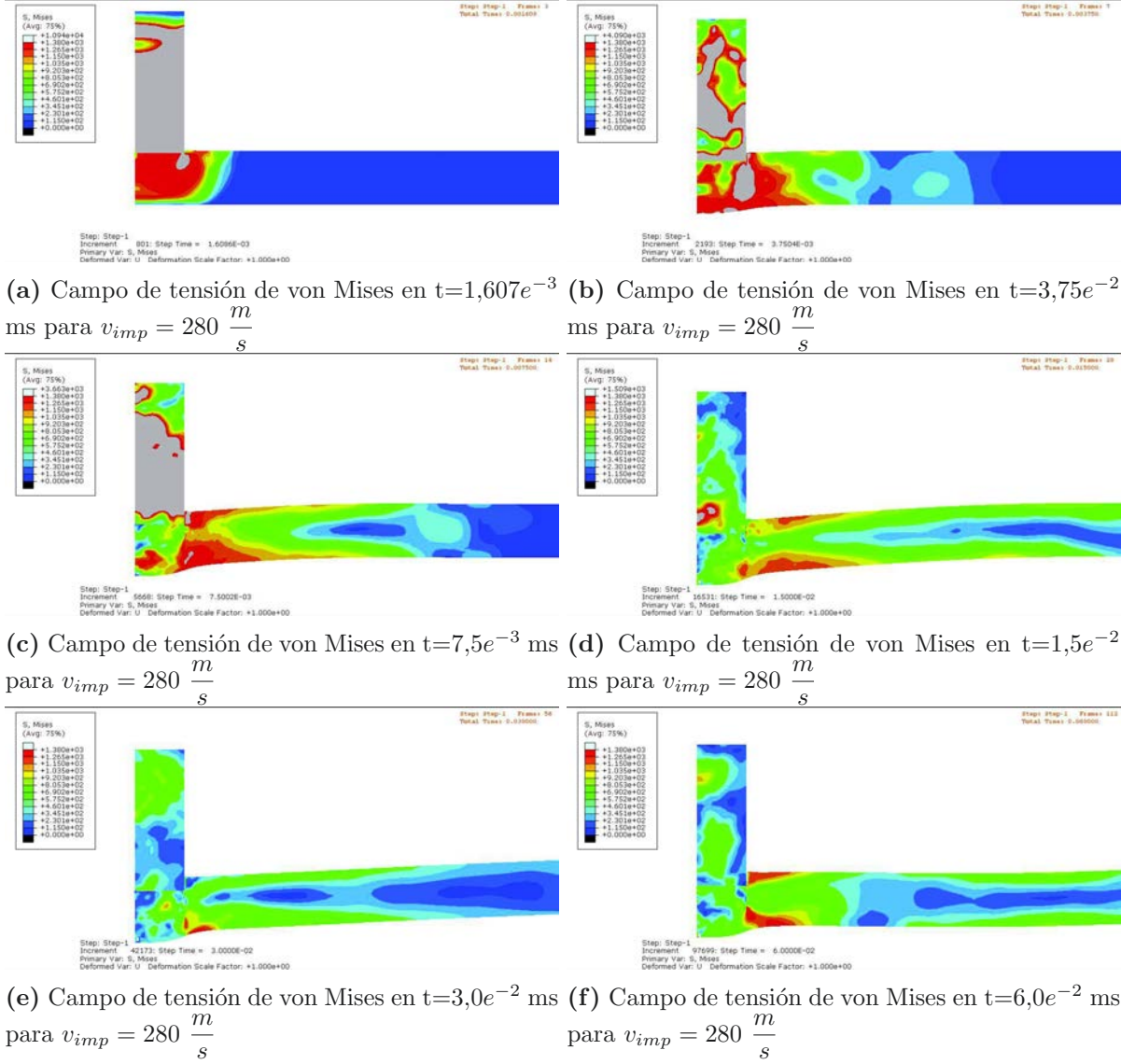


**Figura 6.38:** Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) para el criterio de fallo de Xue - Wierzbicki correspondiente a un valor de  $C_1 = 12$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 6,5$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$ . Los mayores errores se dan para las velocidades de impacto 303 (23,5 % error) y 317 (11,9 % error). Para el resto de velocidades de impacto el error de la predicción de las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 5,2 %.



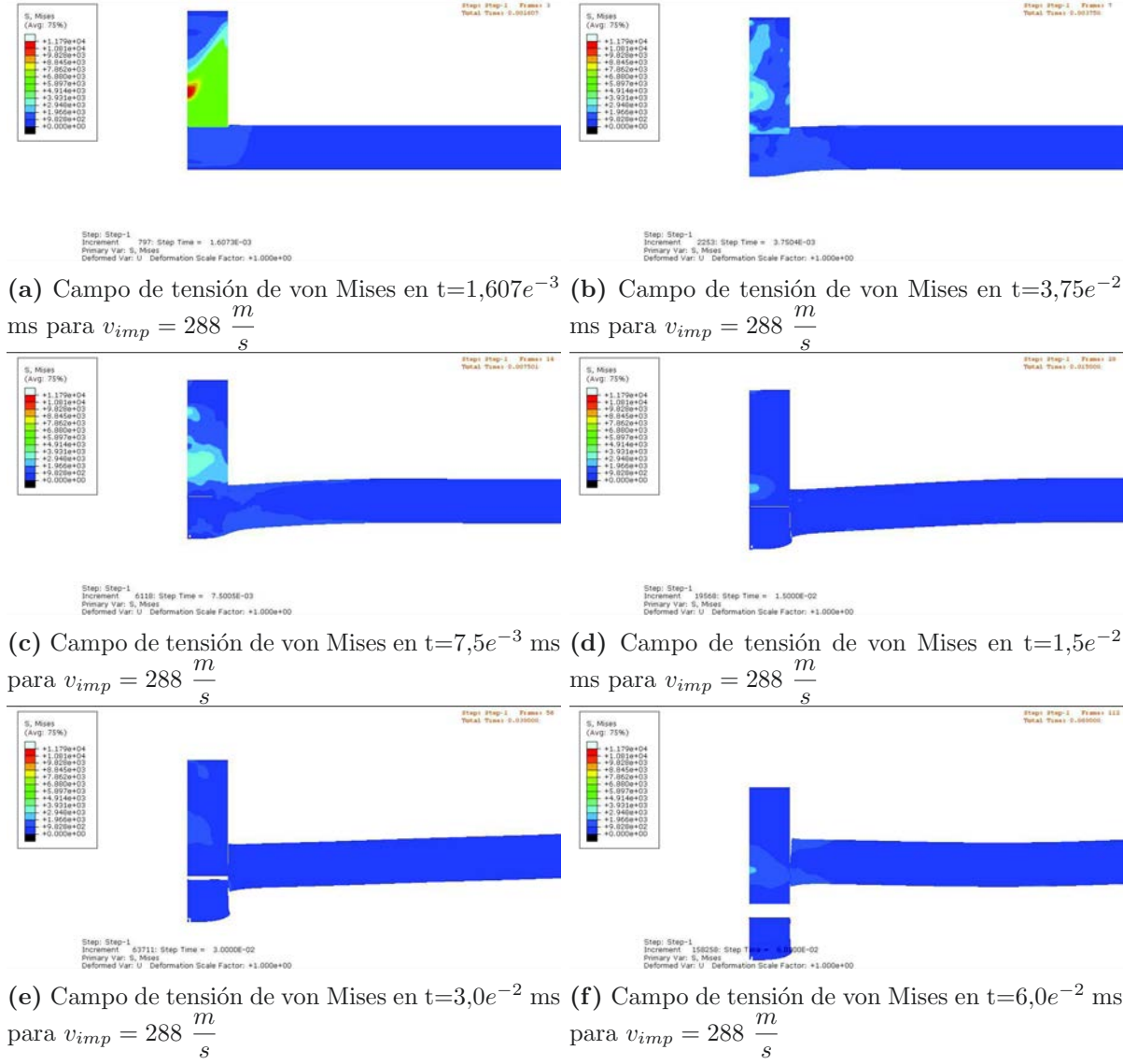
## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

En las figuras 6.39, 6.40 y 6.41 se puede ver que las simulaciones predicen para todas las velocidades de impacto un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



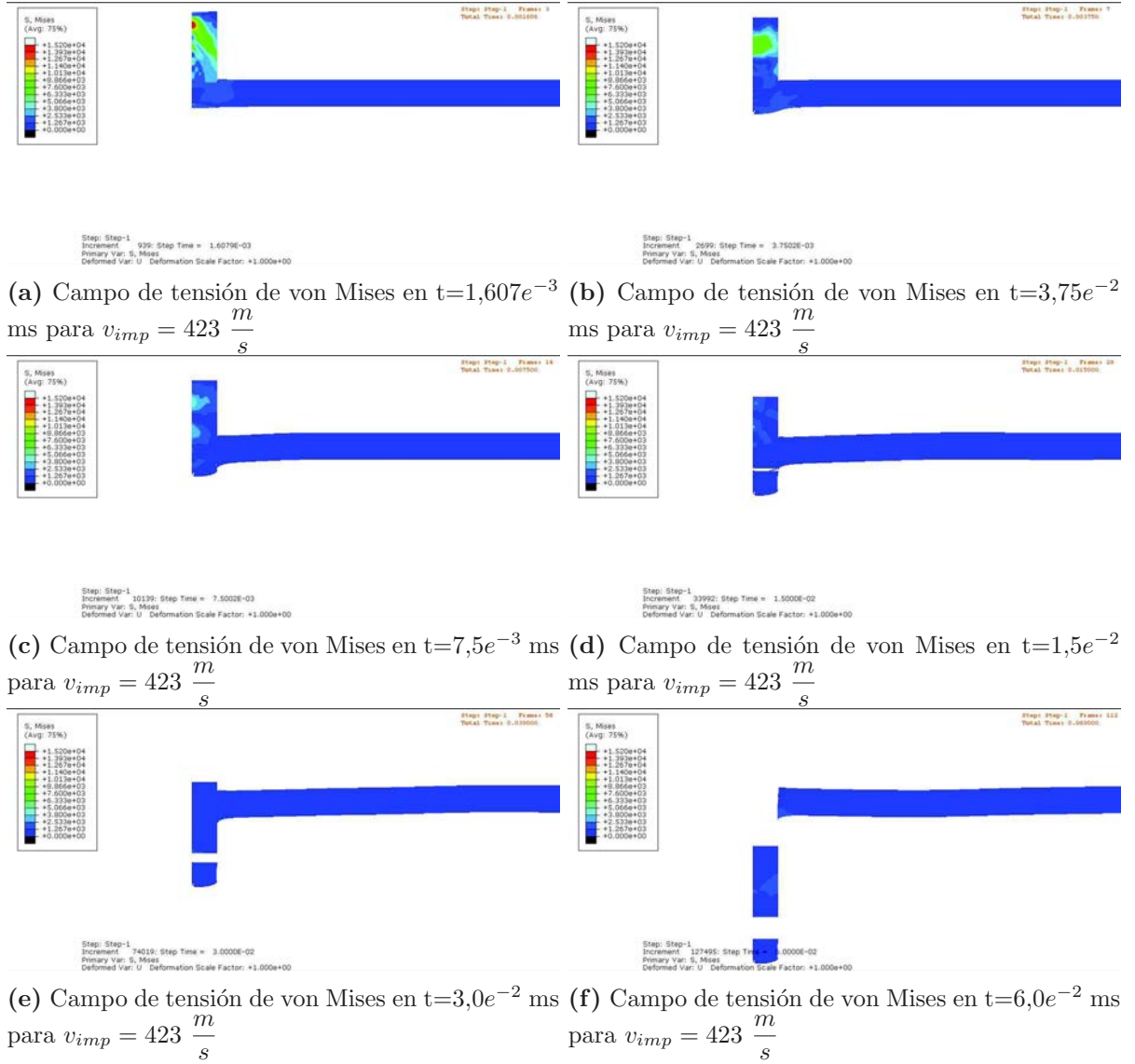
**Figura 6.39:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente a un valor de  $C_1 = 12$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 6,5$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$ .

## 6.9 Criterio VI: Modelo de fallo de Xue - Wierzbicki



**Figura 6.40:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente a un valor de  $C_1 = 12$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 6,5$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.41:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente a un valor de  $C_1 = 12$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 6,5$ ,  $C_4 = 0,25$  y  $m_{XW} = 2$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6.10. Criterio VII: Modelo de fallo por Daño

Como se comentó en 2.4.9 Criterio VII: Modelo de fallo por Daño el modelo de daño depende de cuatro parámetros, daño crítico ( $D_c$ ), umbral de deformación plástica acumulada ( $p_D$ ), el parámetro energético de la ley de daño ( $S$ ) y el exponente de la ley unificada de daño ( $s$ ). Hasta donde sabemos, no se han publicado datos acerca de los parámetros del modelo de daño para la aleación Ti6Al4V probada en condiciones de impacto de alta velocidad. Para determinar los valores aproximados de algunos de estos parámetros tal como  $p_D$ , nos hemos basado en los resultados publicados de ensayos de tracción. A partir del trabajo de F. Hegedües et al. (16), se estimó un valor apropiado para  $p_D = 0,075$ . Este valor corresponde a la tensión máxima alcanzada y la iniciación del daño.

Los tres parámetros restantes se determinan ajustando los resultados numéricos a los datos experimentales obtenidos a partir de los ensayos de impacto. Se ha realizado un barrido de dichos parámetros tratando de ajustar en la medida de lo posible la velocidad residual de los siguientes **puntos de control** experimentales ((280, 0), (288, 57) y (423, 230)), extradidos de la tabla 6.6. El primero (280, 0) es el límite balístico obtenido de la prueba de impacto. Hemos supuesto que este punto es el más relevante en este tipo de pruebas y consideramos que esta fuertemente relacionado con las propiedades del material, así como por la geometría de la pieza a impactar. El punto de control (288, 57) es el primer punto obtenido con un velocidad residual distinta de 0 y fue seleccionado con el fin de ajustar la pendiente tan acusada observada después del límite balístico en las pruebas de impacto. Por último, el punto de control (423, 230) se seleccionó con el fin de que coincida con la apariencia asintótica para grandes velocidades observadas en los ensayos de impacto. Los parámetros se determinaron cuando la diferencia de velocidades residuales con respecto a los valores obtenidos experimentalmente presenta un error aceptable.

En la figura 6.42 se muestra la influencia del parámetro  $S$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar la influencia de este parámetro es moderado en el rango de valores considerados y para todas las velocidades de impacto evaluadas. Como era de esperar, en general, la velocidad residual tiene una tendencia decreciente al aumentar el valor del parámetro no obstante se observa una tendencia poco definida para una velocidad de impacto  $288\frac{m}{s}$  que es la primera velocidad inmediatamente superior a la velocidad límite de la que se tienen valores experimentales.



## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

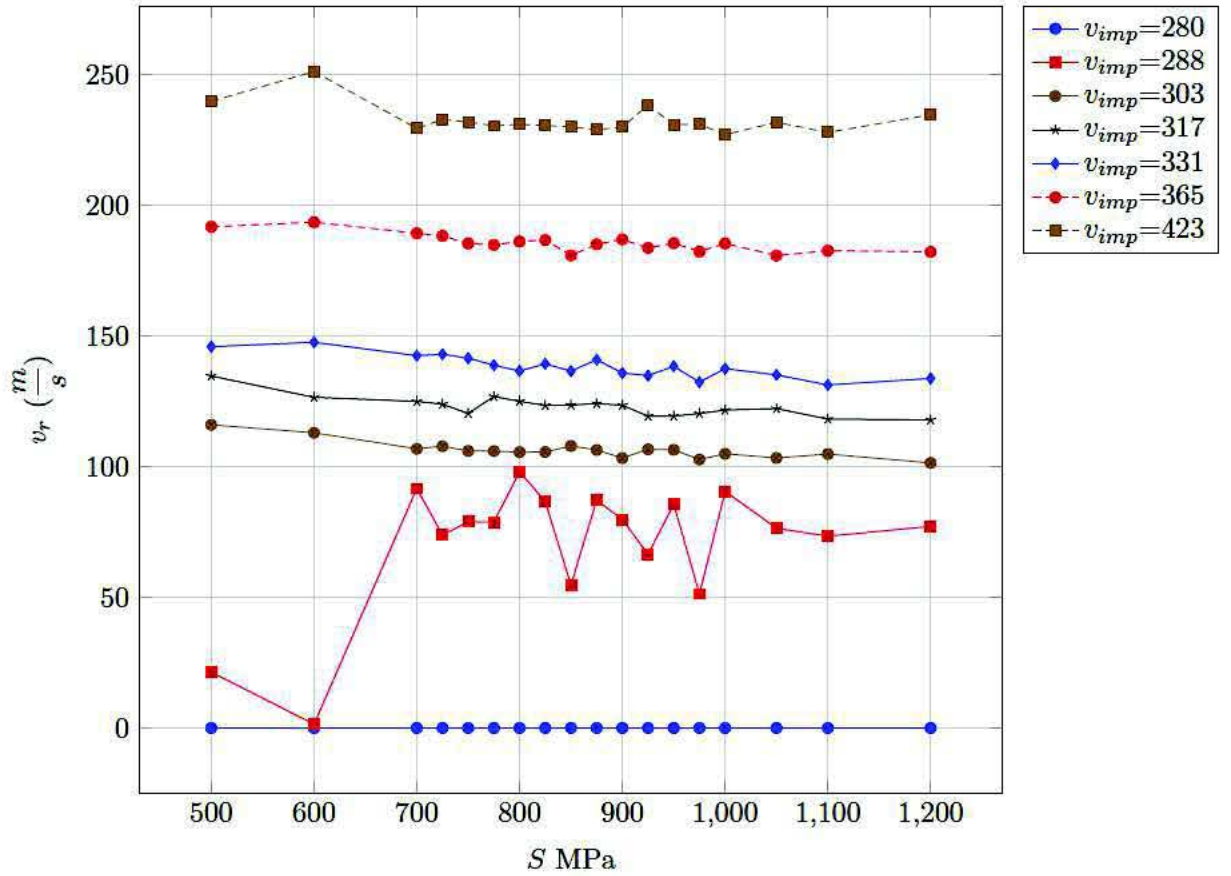
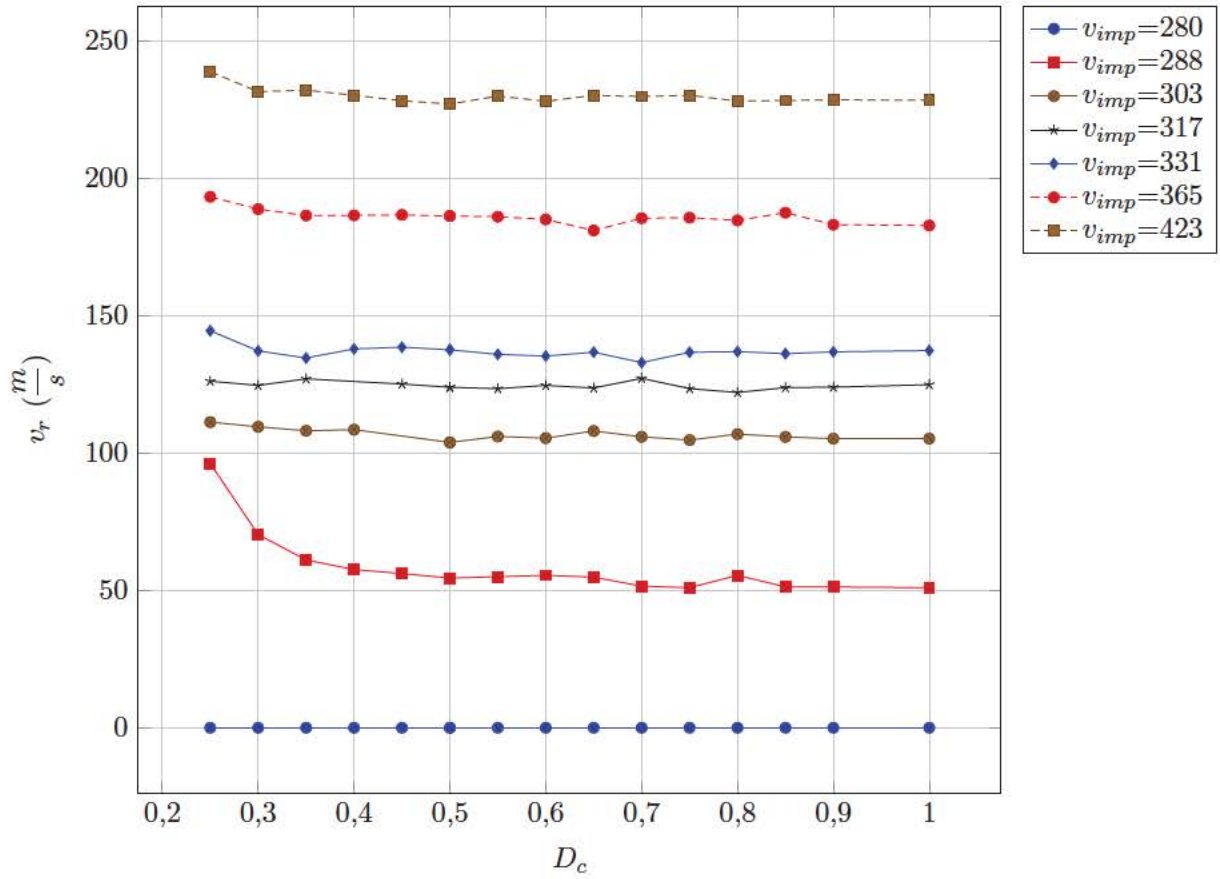


Figura 6.42: Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $S$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo correspondiente a un valor de  $\beta_D = 0,75$ ,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ .

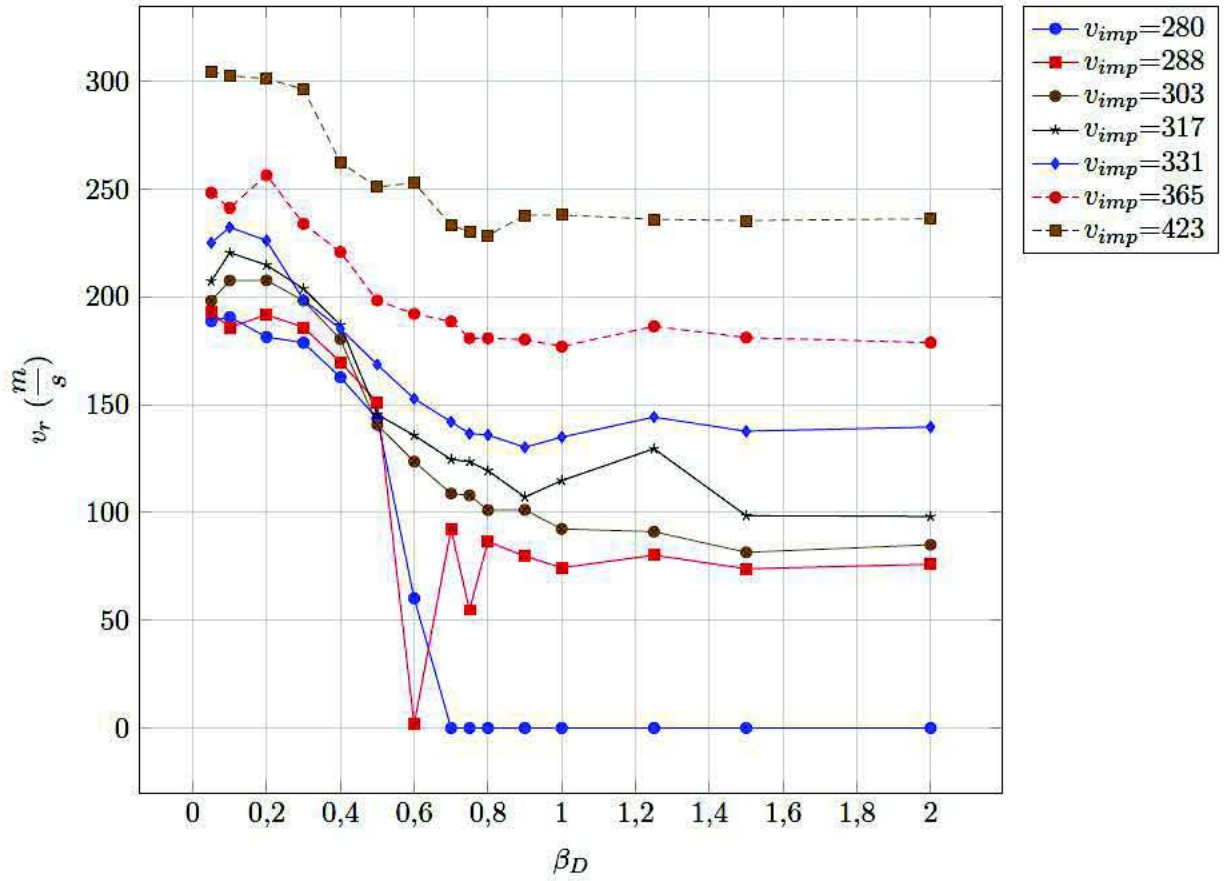
En la figura 6.43 se muestra la influencia del parámetro  $D_c$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar la influencia de este parámetro es moderado en el rango de valores considerados y para casi todas las velocidades de impacto evaluadas, con la única excepción de  $v_{imp}=288$  en la que se aprecia una influencia considerable. La tendencia general para todas las velocidades de impacto es un decrecimiento de la velocidad residual al aumentar el valor del parámetro  $D_c$ .



**Figura 6.43:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $D_c$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $\beta_D = 0,75$  y  $p_D = 0,075$ .

En la figura 6.44 se muestra la influencia del parámetro  $\beta_D$  en la velocidad residual a diferentes velocidades de impacto. Como se puede apreciar este parámetro tiene una influencia considerable en la velocidad residual para todas las velocidades de impacto. Para valores crecientes la velocidad residual decrece de manera asintótica de manera que para valores grandes del parámetro  $\beta_D$  la velocidad residual apenas varía.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.44:** Velocidad residual ( $v_r$ ) a diferentes velocidades de impacto ( $v_{imp}$  de 280 a 423) en función del parámetro  $\beta_D$  para los siguientes valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ .

El conjunto de parámetros que mejor ajusta la curva velocidad de impacto-velocidad residual son los indicados en la tabla 6.5. En la figura 6.45 se muestran las velocidades residuales, obtenidas experimentalmente y en la simulación numérica, frente a las velocidades de impacto para este modelo de fallo.

Parámetros de Daño			
S	$\beta_D$	$p_D$	$D_c$
850MPa	0.75	0.075	0.65

**Tabla 6.5:** Conjunto de parámetros del modelo de daño que mejor ajustan la velocidad residual en los puntos de control de la tabla 6.6

Después de determinar el conjunto de parámetros (tabla 6.5) que muestran un ajuste razonable entre los resultados experimentales y numéricos en las velocidades de control, estos

## 6.10 Criterio VII: Modelo de fallo por Daño

parámetros se han validado mediante la comparación de los resultados obtenidos en las simulaciones con datos experimentales para las velocidades de impacto restantes. Esta comparación muestra un acuerdo aceptable entre los resultados experimentales y de simulación. Los resultados de la simulación se diferencian de los resultados experimentales en menos de un 6,5 %, siendo la diferencia de velocidad inferior a  $8 \frac{m}{s}$  en el rango de velocidades probado. Las diferencias entre las predicciones numéricas y los datos experimentales se encuentran en la tabla 6.6.

Velocidad de Impacto $m/s$	Velocidad Residual (Experimental) $m/s$	Velocidad Residual (Simulación) $m/s$	Diferencia $m/s$	Diferencia Relativa (%)
<b>280</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	0.0	0.0
<b>288</b>	<b>57</b>	<b>54.8</b>	2.2	3.9
303	115	107.9	7.1	6.1
317	130	123.6	6.4	4.9
331	144	136.6	7.4	5.1
365	173	180.9	-7.9	-4.6
<b>423</b>	<b>230</b>	<b>230.0</b>	0.0	0.0

**Tabla 6.6:** Resultados de la simulación numérica y de los ensayos experimentales. La comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos en las simulaciones numéricas muestran un ajuste razonable entre ellos, siendo la diferencia en todos los casos menor que 6.5 %. Los resultados simulados son los correspondientes a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $\beta_D = 0,75$ ,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ . Los puntos de control seleccionados para el ajuste para la calibración de los parámetros de daños se resaltan en negrita.

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

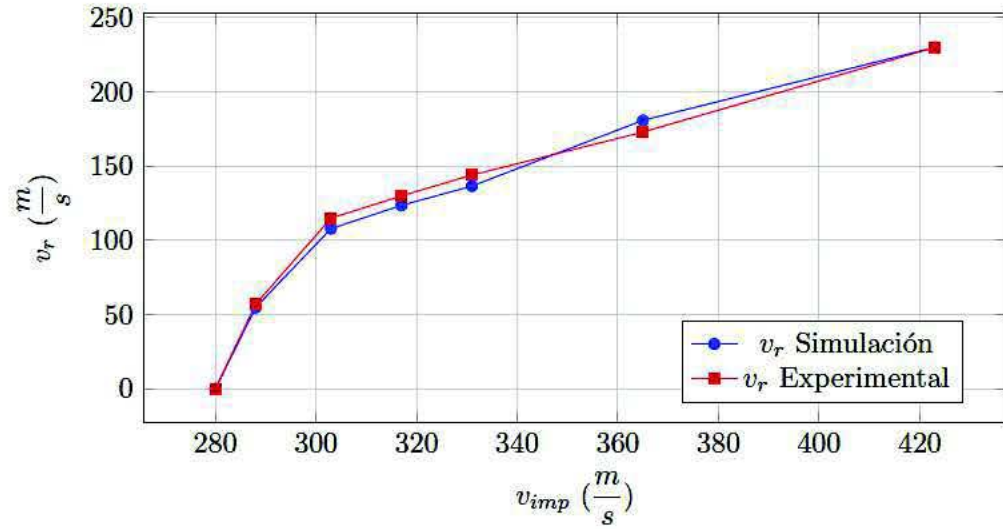
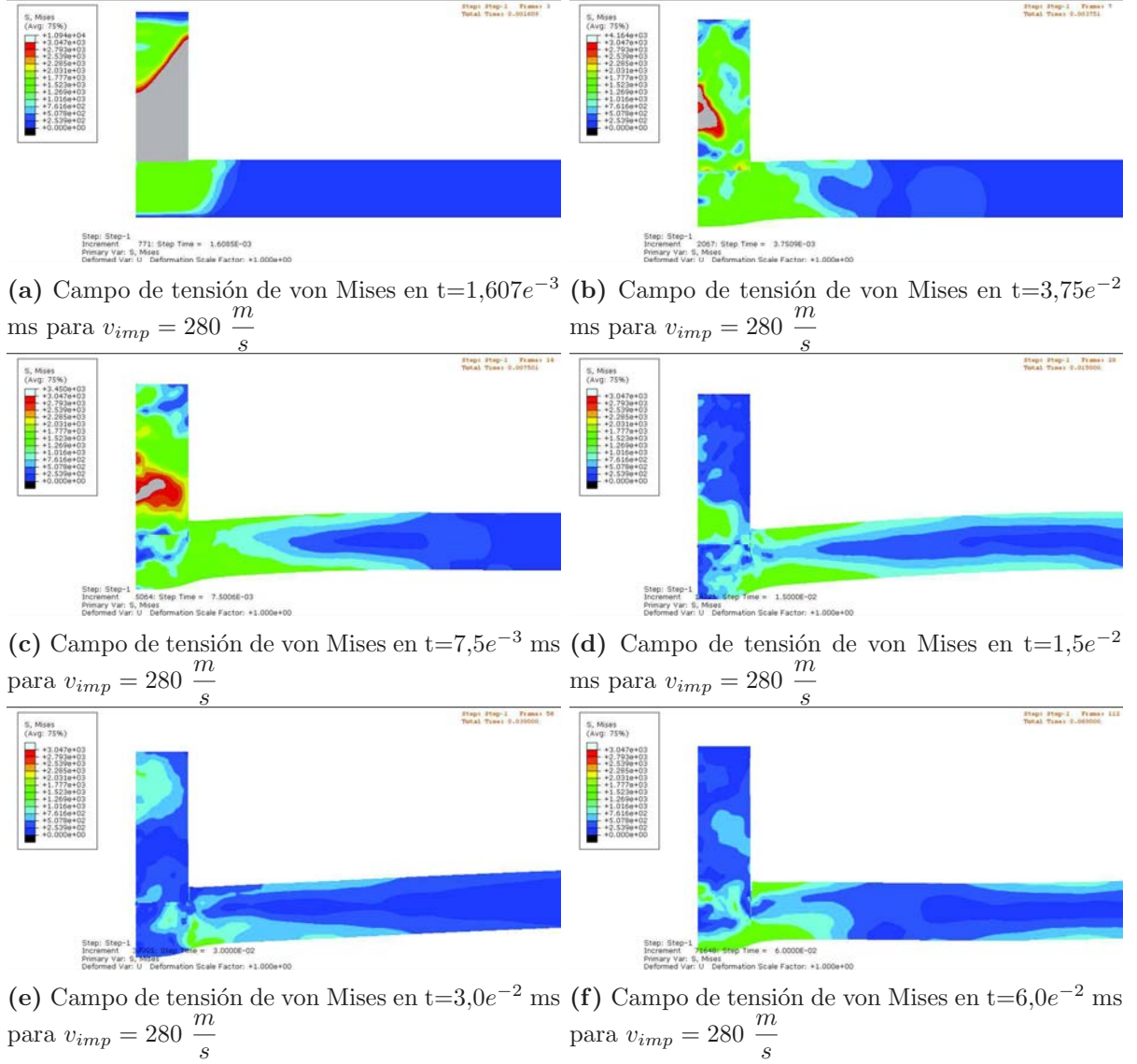


Figura 6.45: Velocidad residual obtenida experimentalmente y en las simulaciones ( $v_r$ ) frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ) correspondientes a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $\beta_D = 0,75$ ,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ . El error máximo en la predicción de las velocidades de impacto obtenido en las simulaciones frente a los datos experimentales es inferior al 6,2 %.



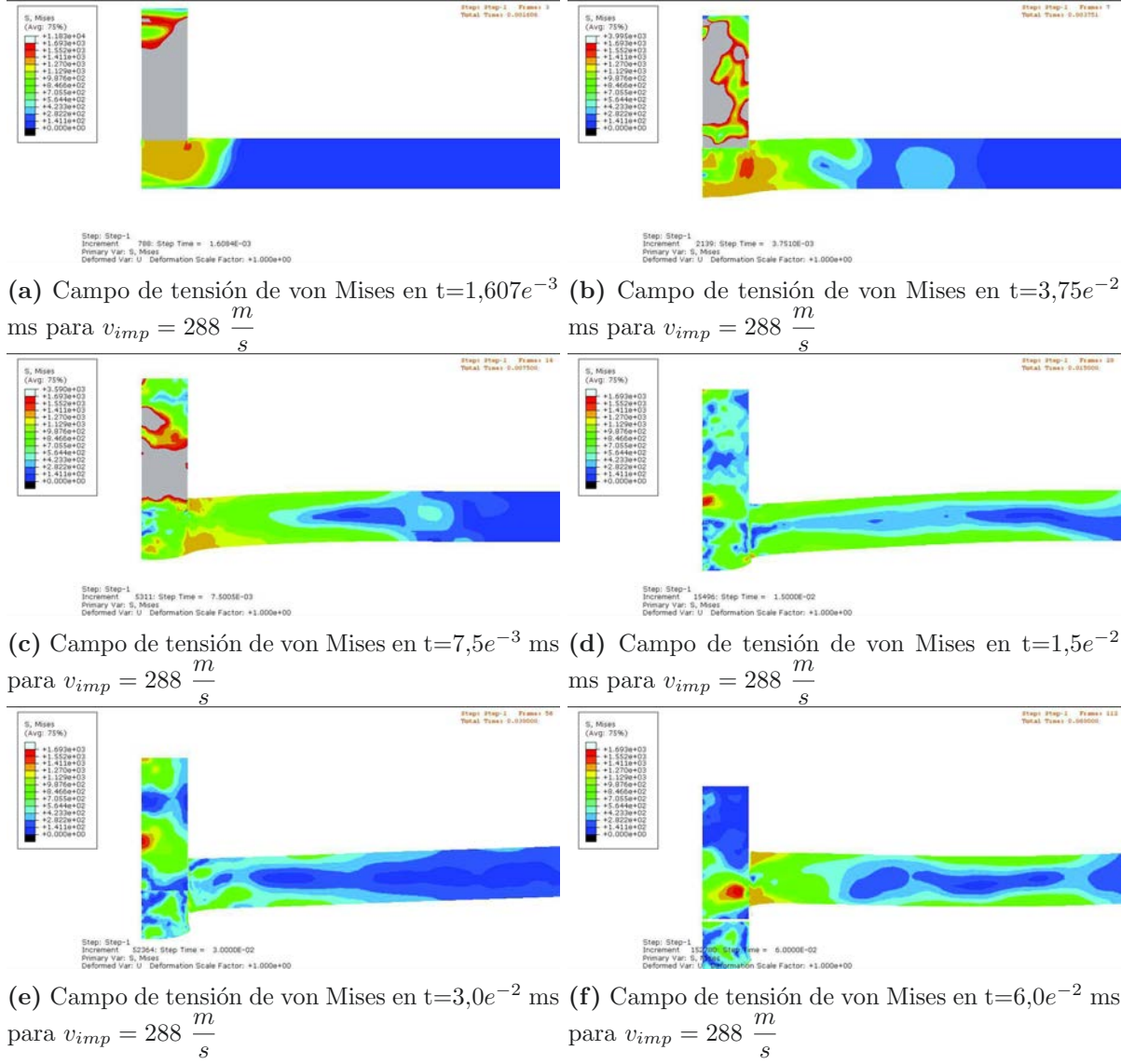
## 6.10 Criterio VII: Modelo de fallo por Daño

En las figuras 6.46, 6.47 y 6.48 se puede ver que las simulaciones predicen para todas las velocidades de impacto un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



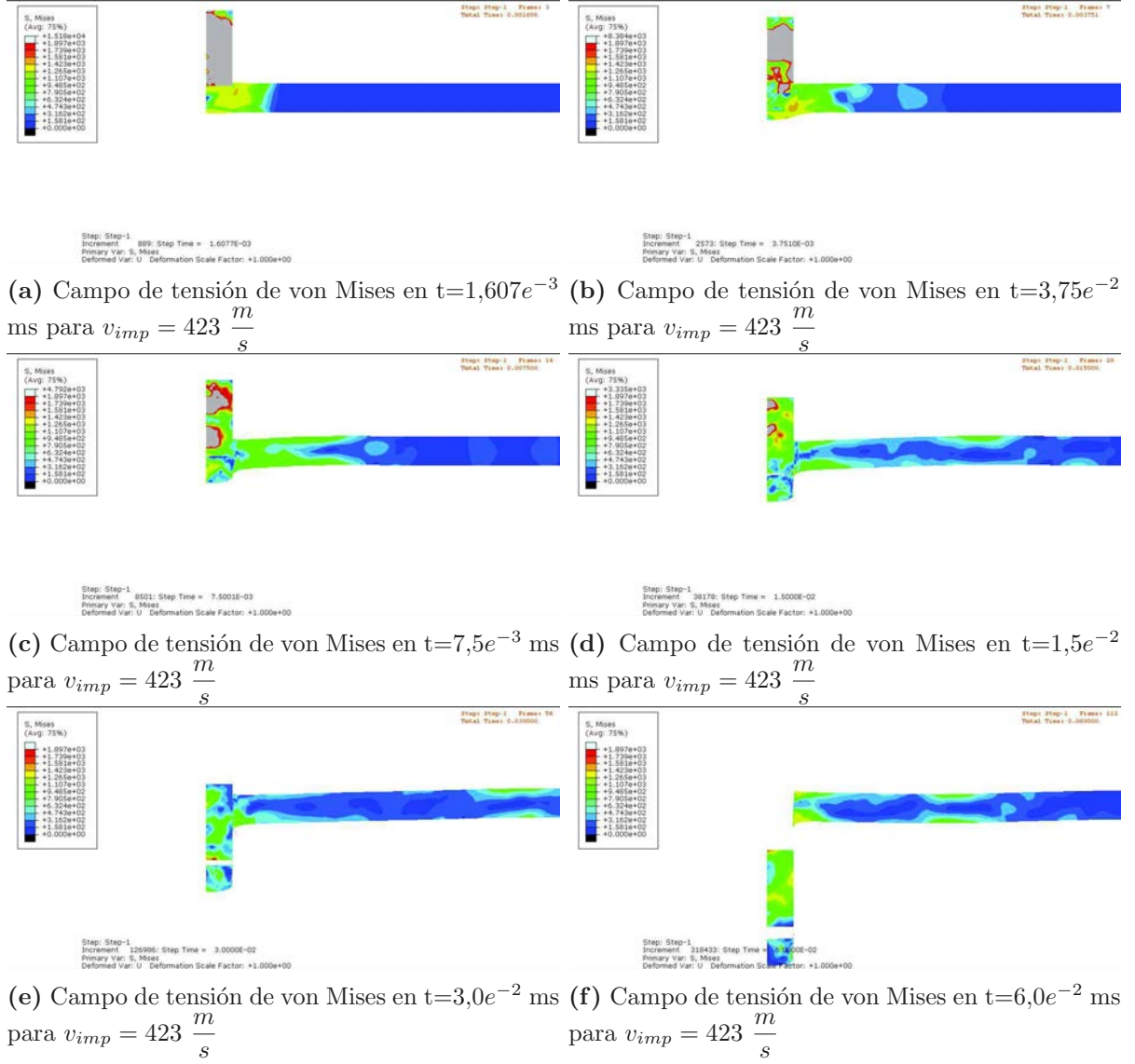
**Figura 6.46:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 280 \frac{m}{s}$  correspondiente a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $\beta_D = 0,75$ ,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ .

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



**Figura 6.47:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  correspondiente a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $\beta_D = 0,75$ ,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.

## 6.10 Criterio VII: Modelo de fallo por Daño



**Figura 6.48:** Evolución del campo de tensión de von Mises para una velocidad de impacto  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  correspondiente a los valores de los parámetros del criterio de fallo de Daño Isótropo  $S = 850$  MPa,  $\beta_D = 0,75$ ,  $p_D = 0,075$  y  $D_c = 0,65$ . En ella se puede observar como las simulaciones predicen un corte limpio a través del espesor de placa y toda la zona impactada se expulsa como un tapón.



## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

---

### 6.11. Resumen y Comparación de Modelos

A la vista de los resultados obtenidos (ver figura 6.49) en las simulaciones llevadas a cabo para la calibración de los distintos criterios de erosión se puede concluir que todos muestran capacidades similares para la predicción de la velocidad residual especialmente para el rango de velocidades de impacto más altas donde la velocidad residual tiene una tendencia prácticamente lineal con la velocidad de impacto, a partir de los  $330 \frac{m}{s}$ . Por encima de los  $330 \frac{m}{s}$  de la velocidad de impacto todos los criterios de fallo predicen la velocidad residual con un error menor al 6 %.

Observando el campo de temperaturas tras el impacto y una vez perforada la placa se puede observar en las figuras 6.50, 6.51 y 6.52 que la temperatura alcanzada en la zona en la que el material sufre la rotura es muy elevada por lo que podemos concluir que la rotura del material está dominada por los efectos térmicos más que por el propio criterio de fallo seleccionado.

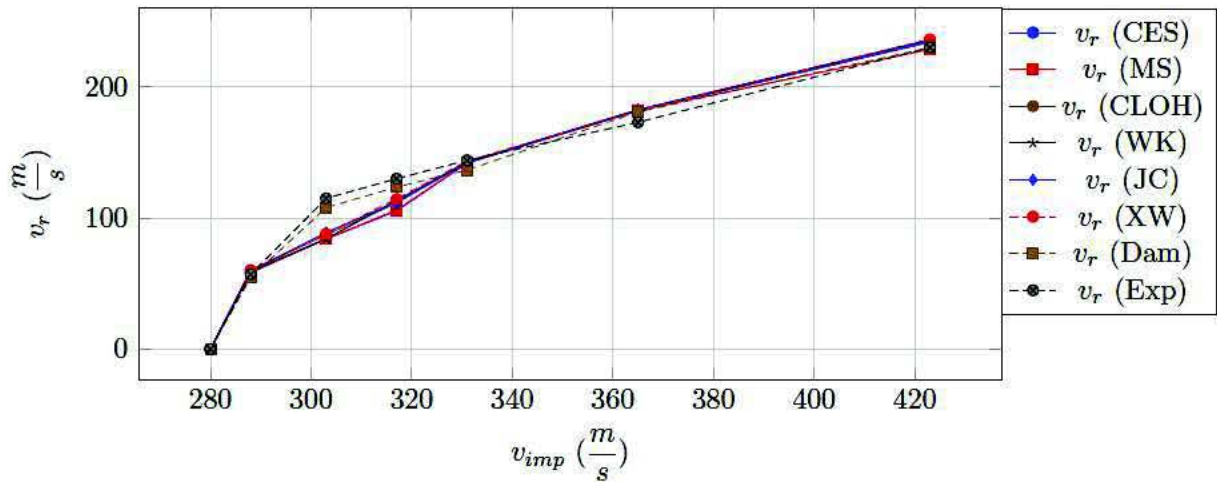
A bajas velocidades de impacto todos los criterios de fallo predicen la aparición de una zona muy estrecha de elevada temperatura y prácticamente recta que recorre casi todo el espesor de la placa impactada. En los criterios de fallo de Cockcroft - Latham modificado por Oh, Wilkins, Johnson-Cook y Xue- Wierzbicki la zona en la que rompe el material por elevada temperatura no recorre todo el espesor de la placa impactada, dejando un último tramo del espesor en el que la rotura si puede establecerse que se debe al criterio de fallo y no al aumento de la temperatura.

A altas velocidades de impacto todos los criterios de fallo predicen la aparición de una zona considerablemente mas gruesa que en el caso de bajas velocidades que recorre la totalidad del espesor de la placa impactada. El campo de temperaturas a altas velocidades de impacto presenta una geometría similar en todos los casos pudiéndose concluir que a altas velocidades de impacto el fallo del material se produce por el ablandamiento térmico y no por el modelo de fallo seleccionado.

El modelo de fallo basado en el daño isótropo permite un mejor ajuste de la velocidad residual en todo el rango de velocidades de impacto analizadas siendo el error en la predicción de la velocidad residual inferior al 6.5 % para todas las velocidades de impacto ensayadas.

El resto de criterios de fallo no son capaces de predecir con tanta precisión la velocidad residual principalmente en un rango medio de velocidades de impacto (  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  a  $v_{imp} =$

$317 \frac{m}{s}$ ) en los cuales estos criterios de fallo muestran errores muy superiores a los presentados por el modelo de fallo basado en el daño isótropo. Los errores en la predicción de la velocidad residual de estos criterios de fallo son superiores al 22 % para una velocidad de impacto de  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  y moviéndose en el rango del 12 % al 19 % para una velocidad de impacto de  $v_{imp} = 317 \frac{m}{s}$ .

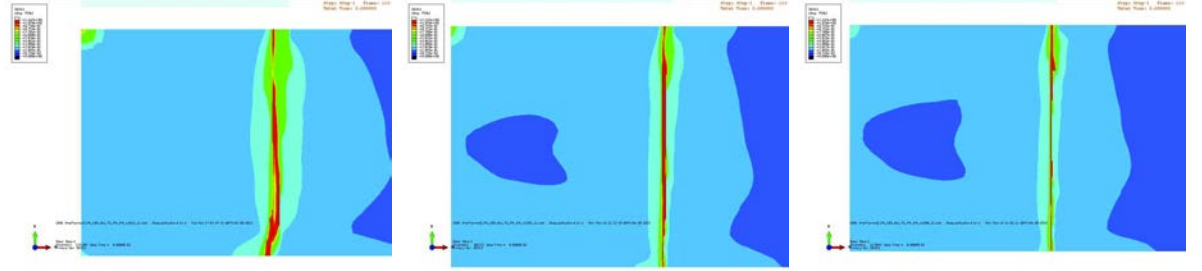


**Figura 6.49:** Velocidad residual ( $v_r$ ) obtenida experimentalmente y en las simulaciones frente a velocidad de impacto ( $v_{imp}$ ). (CES) Deformación plástica equivalente acumulada constante, (MS) Máxima tensión de cortadura, (CLOH) Cockcroft - Latham modificado por Oh, (WK) Wilkins, (JC) Johnson-Cook, (XW) Xue- Wierzbicki, (Dam) Daño Isótropo, (Exp) Experimental

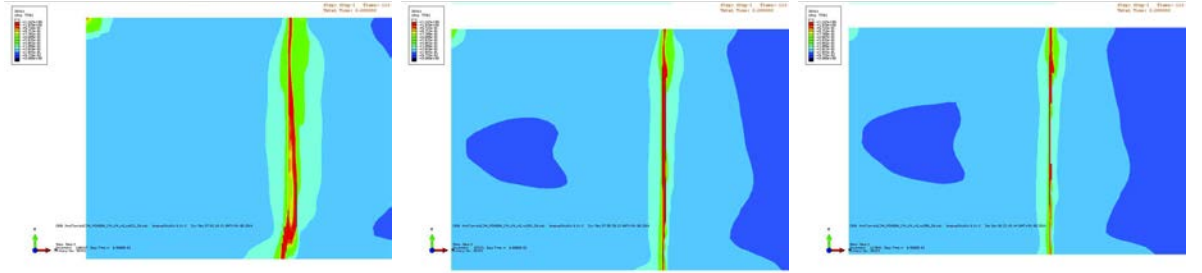
$v_{imp}$	CES %	MS %	CLOH %	WK %	JC %	XW %	Dam %
280	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
288	2.60	2.69	5.43	4.18	4.83	4.96	-3.90
303	-26.93	-26.85	-24.27	-26.85	-22.72	-23.46	-6.13
317	-18.84	-18.40	-14.39	-12.83	-13.54	-11.92	-4.93
331	-1.39	-1.39	-1.06	-0.97	-1.14	-0.37	-5.13
365	5.07	5.15	5.20	5.48	5.57	5.19	4.56
423	1.79	-0.60	1.81	2.60	2.28	2.75	0.01

**Tabla 6.7:** Resultados de los distintos criterios de fallo analizados. Para cada criterio de fallo y para cada velocidad de impacto se muestra el error en la predicción de la velocidad residual. (CES) Deformación plástica equivalente acumulada constante, (MS) Máxima tensión de cortadura, (CLOH) Cockcroft - Latham modificado por Oh, (WK) Wilkins, (JC) Johnson-Cook, (XW) Xue- Wierzbicki, (Dam) Daño Isótropo

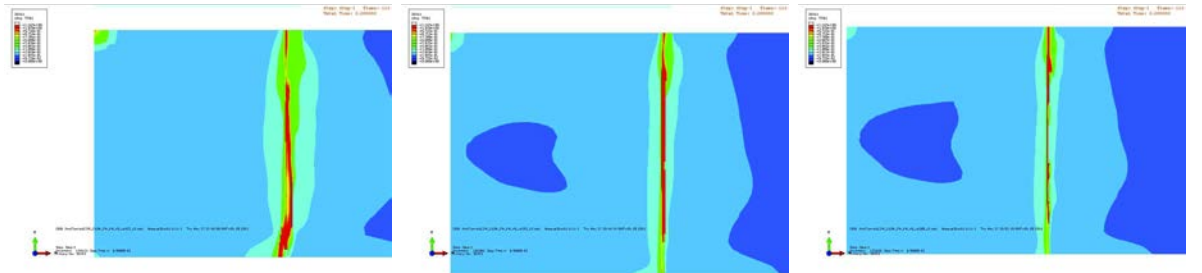
## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN



(a) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio deformación plástica equivalente acumulada (b) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio deformación plástica equivalente acumulada (c) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio deformación plástica equivalente acumulada

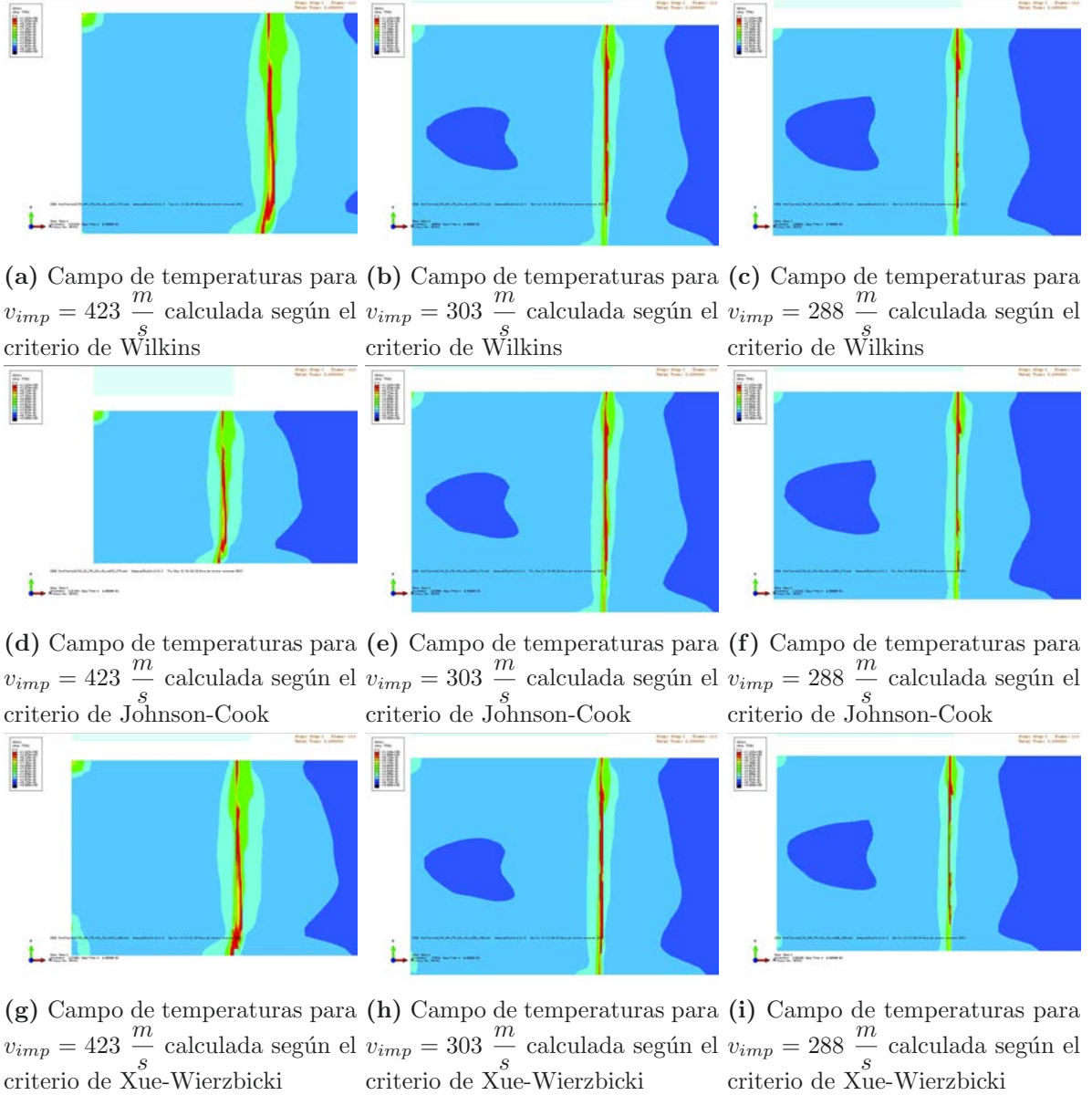


(d) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio máxima tensión de cortadura (e) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio máxima tensión de cortadura (f) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio máxima tensión de cortadura



(g) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio de Cockcroft - Latham modificado por Oh (h) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio de Cockcroft - Latham modificado por Oh (i) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio de Cockcroft - Latham modificado por Oh

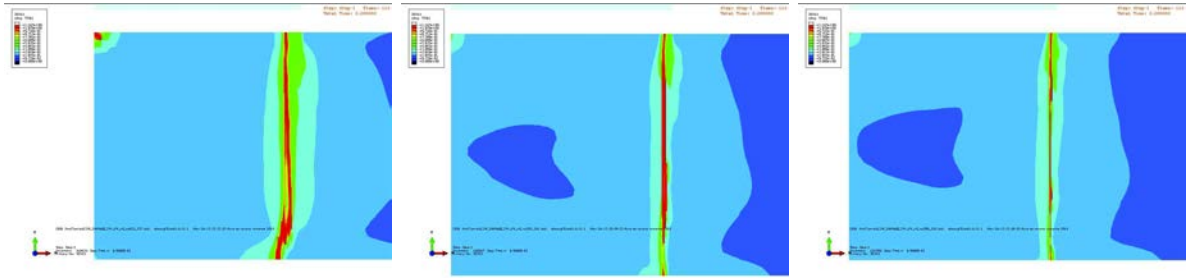
**Figura 6.50:** Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ ,  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  y  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  para los criterios de fallo, deformación plástica equivalente acumulada, máxima tensión de cortadura y de Cockcroft - Latham modificado por Oh



**Figura 6.51:** Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ ,  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  y  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  para los criterios de fallo de Wilkins, de Johnson-Cook y de Xue-Wierzbicki

## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

---



(a) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio de daño isótropo      (b) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio de daño isótropo      (c) Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  calculada según el criterio de daño isótropo

**Figura 6.52:** Campo de temperaturas para  $v_{imp} = 423 \frac{m}{s}$ ,  $v_{imp} = 303 \frac{m}{s}$  y  $v_{imp} = 288 \frac{m}{s}$  para el criterio de daño isótropo



## 6. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN

---

## 7

# Aplicación al Corte Ortogonal

En este capítulo se van a aplicar los modelos implementados y calibrados para la aleación Ti6Al4V a la simulación de procesos de mecanizado, en concreto al corte orthogonal. Los procesos de mecanizado tienen en común con los procesos de impacto grandes deformaciones y calentamiento localizado debido al trabajo plástico generado y a la fricción en la interfase viruta herramienta.

El objetivo de este capítulo es analizar el comportamiento de los modelos implementados en la simulación de procesos de corte. Para ello se han llevado a cabo ensayos experimentales de corte orthogonal sobre la aleación Ti6Al4V y se ha desarrollado un modelo numérico de corte orthogonal basado en elementos finitos.

En este capítulo se incluye en primer lugar una breve introducción a los procesos de mecanizado. A continuación se describe el trabajo experimental realizado, seguido de los resultados obtenidos en el modelado numérico del proceso de corte.

### 7.1. Mecanizado y Corte de Aleaciones Metálicas

La teoría de mecanizado se refiere a las diversas características del proceso de corte, incluyendo las fuerzas, la deformación, la velocidad de deformación, la temperatura y el desgaste de las herramientas de corte.

Todas las operaciones de corte de aleaciones metálicas, tales como torneado, taladrado, perforación, rectificado, fresado y otros procesos de eliminación de material producen viruta de una manera similar. Por lo tanto, el análisis de la formación de viruta puede dar una mejor



## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

comprensión de la mecánica de los procesos de mecanizado.

En general, la principal preocupación al diseñar componentes estructurales es definir las condiciones en las que el material no se fractura o falla en servicio. Sin embargo en el mecanizado de aleaciones metálicas, se desea el efecto contrario, de forma que la fractura del material se produzca con un mínimo esfuerzo. La optimización de los parámetros de corte de manera que faciliten la iniciación y propagación de la fractura en la pieza de trabajo dará lugar a considerables ahorros de costes.

El mecanizado es un proceso de gran importancia industrial ya que muchos componentes de formas complejas sólo pueden formarse por corte o fresado. Hasta no hace muchos años, la tecnología de mecanizado se basaba en el trabajo artesanal de los técnicos o experimentos que requerían mucho tiempo para avanzar y cumplir con los requisitos. Hoy en día, el mecanizado ya es más ciencia que arte.

El mecanizado sigue siendo una de las operaciones de fabricación menos comprendidas. El mecanizado implica típicamente grandes tensiones y deformaciones en un pequeño volumen y a una velocidad alta. Comprender la física subyacente a las operaciones de corte de aleaciones metálicas no solo puede ayudar a mejorar las técnicas y procesos de corte sino que también permitirá ampliar nuestra comprensión de mecanismos de gran complejidad asociados a la formación de viruta, como la formación de las bandas adiabáticas de cortadura, que también aparecen en otras aplicaciones industriales.

Para conseguir la optimización de los parámetros de corte antes mencionada se requiere un mejor modelado y simulación del proceso de corte de aleaciones metálicas. La complejidad de los fenómenos asociados al corte de aleaciones metálicas, tales como la fricción entre viruta y herramienta, el calor generado debido a esta fricción, las grandes tensiones en la región de corte y las altas velocidades de deformación han limitado la modelización teórica de la formación de viruta. Esta complejidad ha forzado a que las investigaciones se centren principalmente en el modelado y simulación por ordenador del proceso de corte.

### 7.1.1. Formación de Viruta

Los mecanismos de formación de viruta son bastante complejos, lo que lleva a teorías y modelos igualmente complejos que representan estas teorías. Es cierto que los modelos siempre incluyen simplificaciones con el fin de incorporar adecuadamente la teoría, pero el peligro de una sobresimplificación está latente. El conocimiento de los mecanismos básicos de formación de viruta es el primer paso para poder controlar la formación de la viruta y a entender las características de la misma. La falta de control sobre la formación de la viruta suele conducir a acabados superficiales mas pobres, una deficiente precisión dimensional y problemas relacionados con la retirada de viruta de la zona de mecanizado.

La formación de viruta en todos los procesos de mecanizado puede ser descrito, en teoría, de una manera común por dos esquemas de corte diferentes denominado de corte ortogonal y de corte oblicuo, representados en 7.1 y 7.2 respectivamente. En el corte ortogonal el borde de corte de la herramienta es perpendicular a la dirección de movimiento relativa entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo y también a la cara lateral de la pieza de trabajo. A partir del movimiento relativo de la pieza de trabajo y la herramienta de corte, se genera una capa de material que forma la viruta.

El corte ortogonal representa un problema mecánico de dos dimensiones que no considera el rizado lateral de la viruta. Esto representa sólo una pequeña proporción dentro de los procesos de mecanizado utilizados en la industria moderna. Sin embargo, es ampliamente utilizado en el trabajo teórico y experimental debido a su simplicidad.

Debido a su naturaleza 2D, en los problemas de corte ortogonal, muchas variables del problema se eliminan, por ejemplo, sólo se identifican dos componentes de la fuerzas de corte. Por otro lado, el corte oblicuo, donde la herramienta de corte se inclina un ángulo  $\lambda$  como se puede ver en 7.2, corresponde a un problema de tres dimensiones con una representación más realista del flujo de la viruta, pero requiere de análisis más complejo, al ser necesario considerar las tres componentes de la fuerza de corte y el rizado de la viruta lateralmente.

En el corte oblicuo, que es el caso más general que incluye el corte ortogonal, se pueden considerar tres componentes de la fuerza de corte mutuamente perpendiculares. Si se adopta un sistema de coordenadas basado en las direcciones de la velocidad de corte y de avance podemos

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

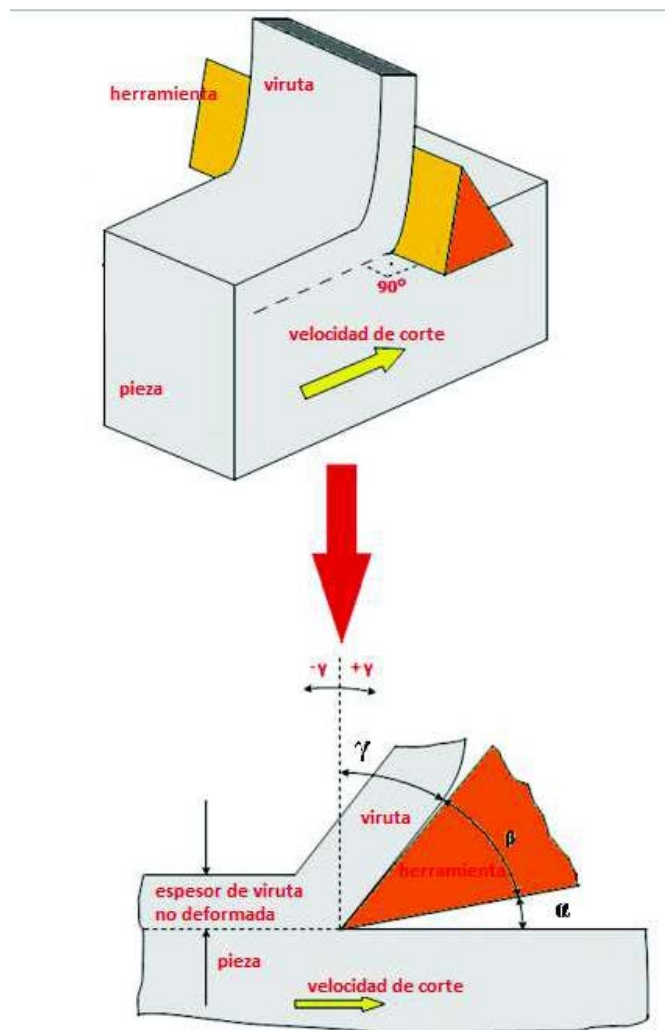
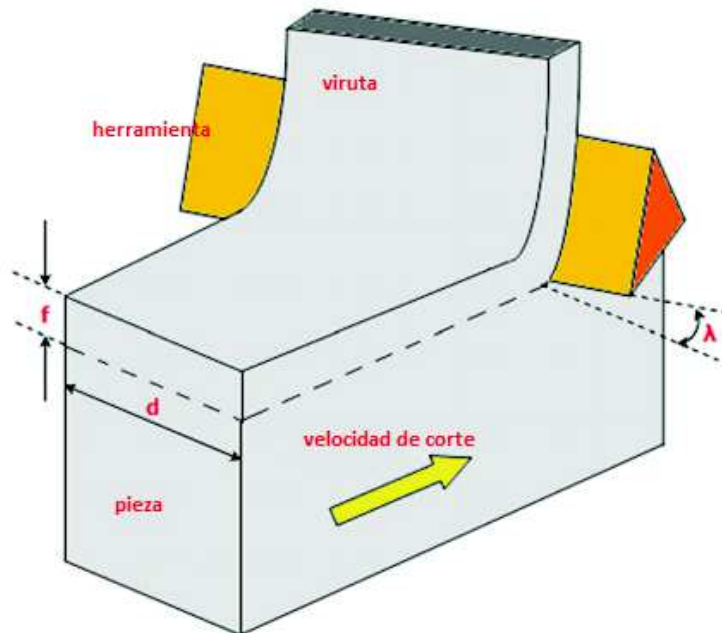


Figura 7.1: Modelo de corte ortogonal

establecer las siguientes componentes de la fuerza en la herramienta.

- Fuerza de corte ( $F_c$ ): componente en la dirección del movimiento de corte y por tanto, paralela a la superficie mecanizada de la pieza en el filo de la herramienta.
- Fuerza de avance ( $F_a$ ): componente en la dirección del movimiento de avance
- Fuerza de penetración ( $F_p$ ): es la componente de la fuerza perpendicular a las dos anteriores.



**Figura 7.2: Modelo de corte oblicuo**

En el corte ortogonal, la fuerza de penetración es nula por la naturaleza bidimensional del problema siendo, en la mayoría de los casos, la fuerza de corte ( $F_c$ ) la mayor.

El conocimiento de las fuerzas de corte antes del mecanizado, si es posible, es importante ya que a través de estas se pueden estimar los requisitos de potencia de la máquina herramienta, las propiedades de la herramienta de corte y la calidad de la pieza de trabajo. Por ejemplo, si la fuerza de avance es alta y el soporte de la herramienta no es lo suficientemente rígido, el borde de corte será empujado lejos de la superficie de la pieza, causando falta de precisión dimensional. La magnitud de estas fuerzas está ligada a los parámetros de corte, como pueden

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

ser la velocidad, el avance, etc. además de las características del material a mecanizar. En la figura 7.3 se muestran los principales parámetros de corte que son:

- Velocidad de Corte  $V_c$ , es la velocidad relativa entre la herramienta y la pieza a mecanizar
- Avance  $a_c$ , se refiere al espesor de la porción de material que tras el corte se convierte en viruta.
- Espesor de viruta  $a_v$ , se refiere al espesor con el que queda el avance tras el corte.
- ángulo de desprendimiento  $\gamma$ , es el ángulo formado entre la cara de desprendimiento y la perpendicular a la dirección de corte.
- ángulo de filo de la herramienta  $\beta$ , es el ángulo formado entre la cara de desprendimiento y la de incidencia de la herramienta.
- ángulo de incidencia  $\alpha$ , es el ángulo formado entre la superficie de incidencia de la herramienta con la superficie mecanizada.
- ángulo de cortadura  $\Phi$ , es el ángulo que forma la línea que va desde el filo de la herramienta hasta el punto de la superficie de la pieza en el que esta empieza a deformarse.

Un ángulo de desprendimiento grande favorece la penetración de la herramienta y mejora el acabado superficial, pero el filo suele ser débil y expuesto a una rotura catastrófica. Si el ángulo de desprendimiento es pequeño o negativo, el corte de material requiere un mayor consumo de energía durante el corte resultando en un mayor calentamiento de la herramienta además de que en ocasiones, si el material es muy resistente, se necesita un portaherramientas más robusto convenientemente ajustado para compensar las vibraciones. El aspecto positivo de usar herramientas con ángulo de desprendimiento pequeño o negativo es la de conseguir una herramienta más robusta. En general, el ángulo de desprendimiento más adecuado será el mayor que la herramienta pueda soportar sin romperse, y su elección estará condicionada por el resto de parámetros de corte. En función del valor del ángulo de desprendimiento, las herramientas de corte se clasifican en herramientas con geometría positiva ( $\gamma > 0$ ) y con geometría negativa ( $\gamma < 0$ ). Para los materiales de alta resistencia, el ángulo de desprendimiento se elige para que sea negativo, aumentando de este modo el ángulo del filo y creando una herramienta más fuerte. La cara de incidencia de la herramienta no participa en el arranque de viruta, sino que asegura que la herramienta no roce sobre la superficie recién maquinada y termine deteriorando el acabado. Si el ángulo de incidencia es demasiado grande se debilita el filo, si por el contrario el ángulo de incidencia es muy pequeño se puede producir un roce excesivo entre la herramienta y

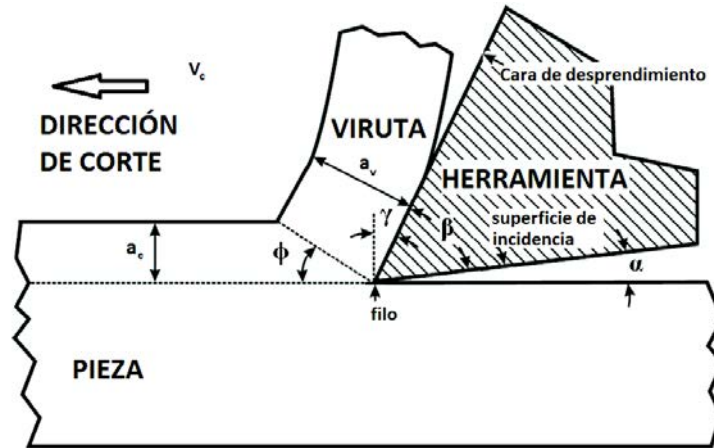


Figura 7.3: Modelo de corte con los parámetros más representativos

la pieza provocando un aumento de la temperatura tanto de la pieza como de la herramienta lo que se traduce en un desgaste más rápido de la herramienta.

En el mecanizado de aleaciones metálicas es posible distinguir tres zonas de deformación como se muestra en la figura 7.4:

- la zona de deformación primaria es la contenida en el área OAB. El material de la pieza que atraviesa el borde OA experimenta grandes deformaciones a altas velocidades de deformación y sale por el borde OB endurecido debido a la deformación plástica. Se ha comprobado por medio de análisis al microscopio y ensayos experimentales que la viruta se produce en esta región por esfuerzos de cortadura. Muchos de los estudios experimentales muestran que esta zona tiene un espesor medio de la décima parte del espesor de la viruta (47)
- la zona de deformación secundaria es la incluida en el área OCD. A lo largo de OD, la longitud de contacto entre la cara de desprendimiento de la herramienta y la viruta, el material se deforma debido a la intensa fricción.
- la zona de deformación terciaria es la contenida en el área OEF. En general aparece cuando la cara de incidencia de la herramienta roza la superficie recientemente mecanizada.

La zona de deformación secundaria se caracteriza por dos regiones, la región de adherencia, más cercana al filo de la herramienta de corte, y la región de deslizamiento, por encima de la anterior (59). En la región de adherencia se pega el material a la herramienta debido a la intensa fricción y se produce un esfuerzo de cortadura con la viruta. En la zona de deformación secundaria, dado

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

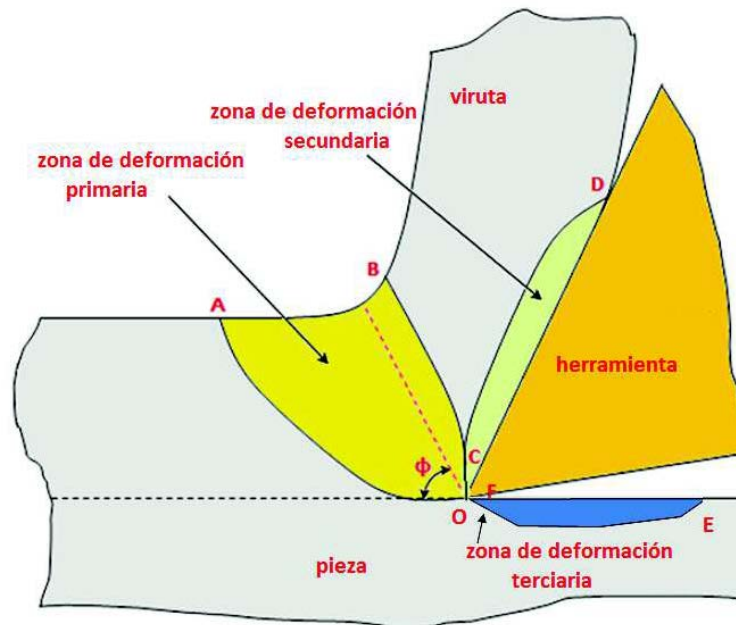
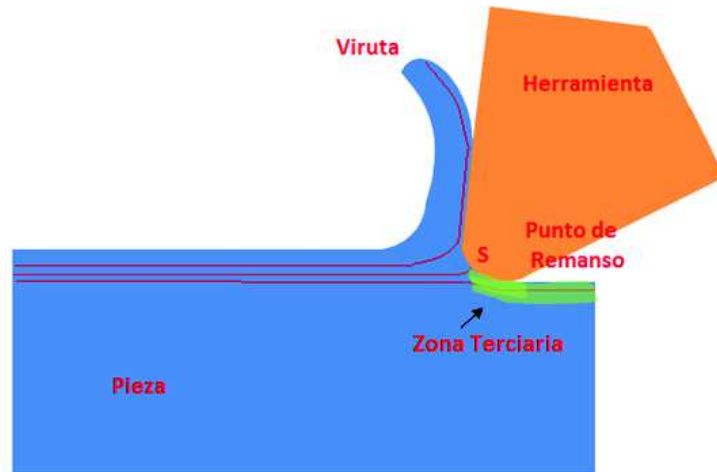


Figura 7.4: Zonas de deformación del proceso de corte en aleaciones metálicas

que el material ya ha experimentado una deformación plástica elevada se supone que el material ya está endurecido por deformación y por tanto en las líneas de deslizamiento se puede suponer que la tensión de cortadura es constante a lo largo de ellas. Por otro lado, la viruta desliza en la zona de deslizamiento con un coeficiente de fricción de Coulomb constante. La tensión de cortadura en la zona de adherencia y el coeficiente de fricción dependen de la temperatura, el material de la herramienta y de la pieza y de la rugosidad de la superficie de la cara de desprendimiento. Observando con detalle el filo de la herramienta 7.5, en la zona de deformación terciaria, se puede identificar un punto de remanso S en el que el material se bifurca en dos corriente, una hacia arriba por la cara de desprendimiento y otra hacia abajo por la cara de incidencia. El material bajo el punto de remanso S se presiona para formar la superficie de acabado.

Todas estas zonas de deformación se caracterizan por un aumento de la temperatura debido a la deformación plástica severa en la zona primaria y debido a la fricción en la zona de deformación secundaria y en la terciaria cuando se dan las condiciones para que esta se genere.

Un análisis detallado de los diferentes estudios del proceso de corte de aleaciones metálicas revela que hay diferentes modelos para este proceso resultado de los diferentes estados de tensión y deformación en la viruta. Durante el mecanizado continuo de la capa sin cortar del material,



**Figura 7.5:** Detalle de la zona de deformación terciaria del proceso de corte con indicación del punto de remanso y las líneas de flujo del material

el filo de la herramienta somete a grandes esfuerzos de compresión al material situado justo delante. La fuerza resultante ejercida por la herramienta sobre la viruta se puede descomponer en una fuerza normal,  $N$  y fuerza de rozamiento,  $F$ .

Debido a dicha compresión, se desarrolla un esfuerzo cortante dentro de esa región comprimida, en diferente magnitud y en diferentes direcciones y con una magnitud que se incrementa rápidamente a medida que avanza la herramienta. Cuando el valor de la tensión de cortadura alcanza o supera la tensión de plastificación del material de la pieza, se produce la aparición de una región de deformación por cortadura generalmente situada en un plano en el que el esfuerzo cortante es máximo. Al seguir avanzando la herramienta las fuerzas que causan los esfuerzos de cortadura en la viruta disminuye rápidamente y finalmente desaparece a medida que la viruta asciende a lo largo de la superficie de desprendimiento de la herramienta. Como resultado, la región de deformación por cortadura detiene el deslizamiento antes de que se produzca el fallo del material.

Mientras tanto en la parte posterior de la viruta empieza a experimentar de nuevo grandes esfuerzos de compresión seguidos de plastificación y deformación por cortadura. Este fenómeno se repite rápidamente dando como resultado la formación y eliminación de la viruta capa a capa. Este fenómeno ha sido explicado de una manera sencilla por Piispanen (43) usando una analogía de naipes.



## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

En virutas procedentes de mecanizados reales es visible la aparición de esta morfología aserrada principalmente en la cara exterior de la viruta. La superficie interior de la viruta se vuelve lisa, debido a una mayor deformación plástica causada por el efecto del roce tan intenso de la viruta con la herramienta a alta presión y temperatura. El patrón de deformación por deslizamiento de las láminas, indicado en este modelo, también se puede ver en virutas reales sometiendo a la viruta a un ataque químico adecuado, puliendo la superficie lateral de la viruta de mecanizado y observando bajo el microscopio.

### 7.1.2. Tipos de Viruta

El arranque de viruta en materiales dúctiles se produce por la deformación plástica que ocurre en una franja estrecha denominada plano de cortadura. Para altas velocidades de corte la conducción del calor es muy reducida y el calor se concentra en un área pequeña alrededor del borde del filo de la herramienta. De esta manera, el endurecimiento por deformación debido a la deformación plástica y el ablandamiento debido a la temperatura alteran las características de formación de viruta.

La naturaleza de la formación de viruta es aproximadamente el mismo para el corte ortogonal que para el corte oblicuo. Hay cuatro tipos básicos de viruta que se pueden formar en el proceso de corte de metal:

- Viruta continua: en general corresponde al régimen normal de corte y es el que mejor acabado superficial deja. Es característica del corte de materiales dúctiles en condiciones de estado estacionario. Sin embargo, las virutas largas y continuas provocan problemas de manejo y eliminación en aplicaciones de la industria moderna.
- Viruta de filo recrecido: se genera en condiciones de bajas velocidades de corte donde la fricción entre la viruta y la cara de desprendimiento de la herramienta es alta. En estas circunstancias la viruta se puede adherir a la cara de desprendimiento de la herramienta. Esta acumulación de material se conoce como filo recrecido o de aportación.
- Viruta discontinua: se produce cuando se mecanizan materiales frágiles, y con materiales dúctiles a velocidades muy bajas de corte. El corte se produce a base de pequeñas fracturas del material base.
- Viruta segmentada: este cuarto tipo de viruta está caracterizada por ser macroscópicamente continua en el que se alternan una banda estrecha de material altamente deformada

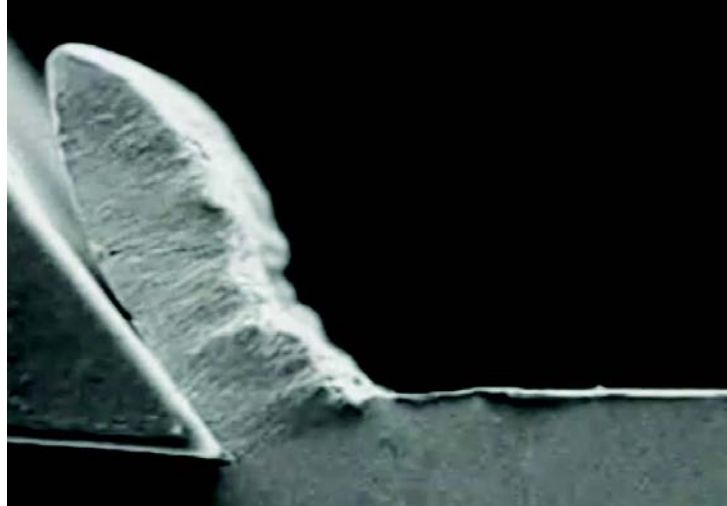


Figura 7.6: Micrografía de viruta continua

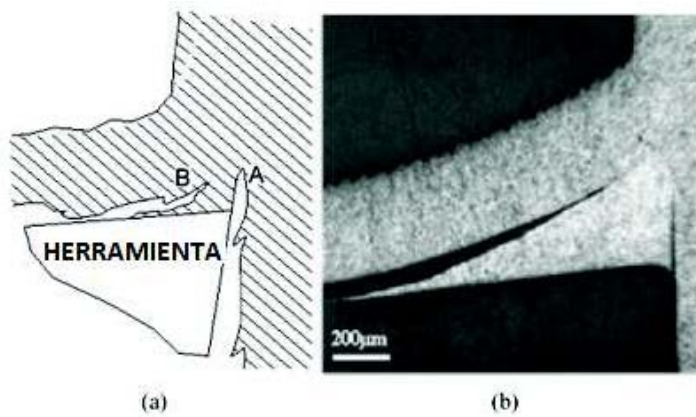
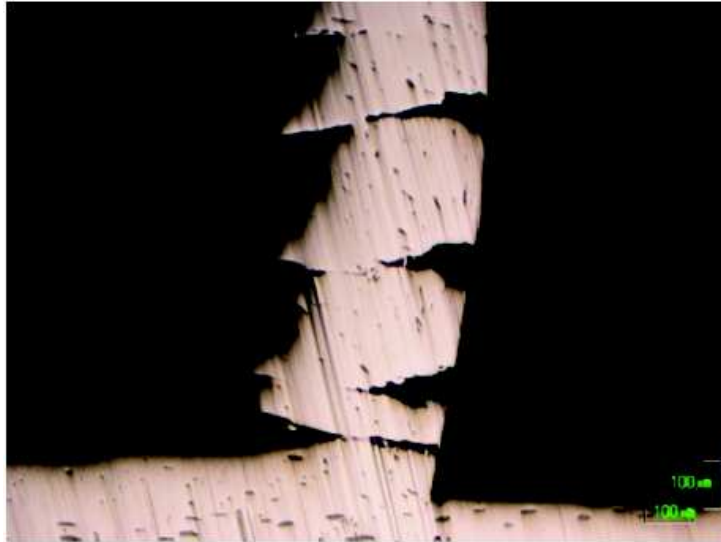


Figura 7.7: a) esquema de una viruta de filo recrecido (Build Up Edge) b) Micrografía de viruta de filo recrecido

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---



**Figura 7.8: Micrografía de viruta discontinua.**

con regiones más anchas de material comparativamente mucho menos deformadas. Estas virutas se forman cuando la pieza de trabajo se ablanda con la temperatura. En las condiciones adecuadas el material se calienta rápidamente en una banda estrecha en la parte delantera de la herramienta, debido a una localización de la deformación plástica que genera una mayor disipación de energía térmica, provocando un ablandamiento del material y consecuentemente propiciando una mayor deformación plástica. Esto hace que esa estrecha banda sea mucho más blanda y débil que el material circundante. Si el material tiene baja conductividad térmica, el calor generado se disipa difícilmente por lo que a veces puede considerarse que el proceso de generación de calor es localmente adiabático. Este tipo de viruta se obtiene al cortar acero templado, acero inoxidable y aleaciones de titanio a altas velocidades de corte.

### 7.1.2.1. Viruta Segmentada

La figura 7.10 muestra una micrografía tomada de un experimento de "parada rápida", donde una operación de corte se detiene bruscamente y la generación de viruta aparece como "congelada". La viruta en este caso no está homogéneamente deformada y presenta una forma con una estructura fuertemente aserrada. Se pueden apreciar regiones de elevada deformación (bandas de cortadura) intercaladas entre regiones donde la deformación plástica es bastante menor. Este tipo de viruta es muy habitual en procesos de mecanizado a altas velocidades de corte.

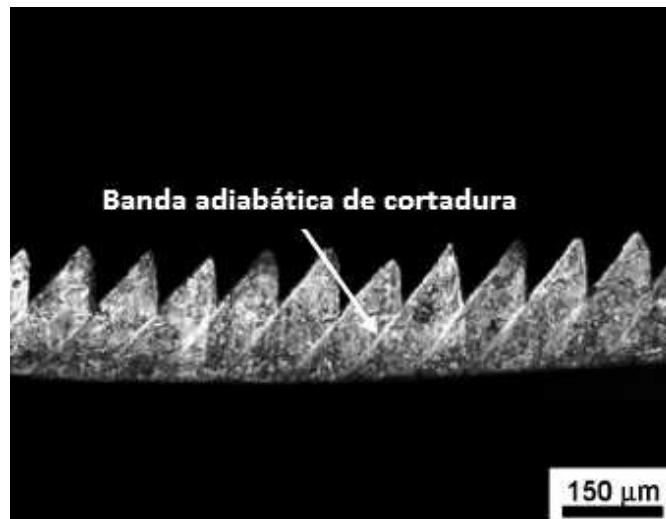


Figura 7.9: Micrografía de viruta segmentada.

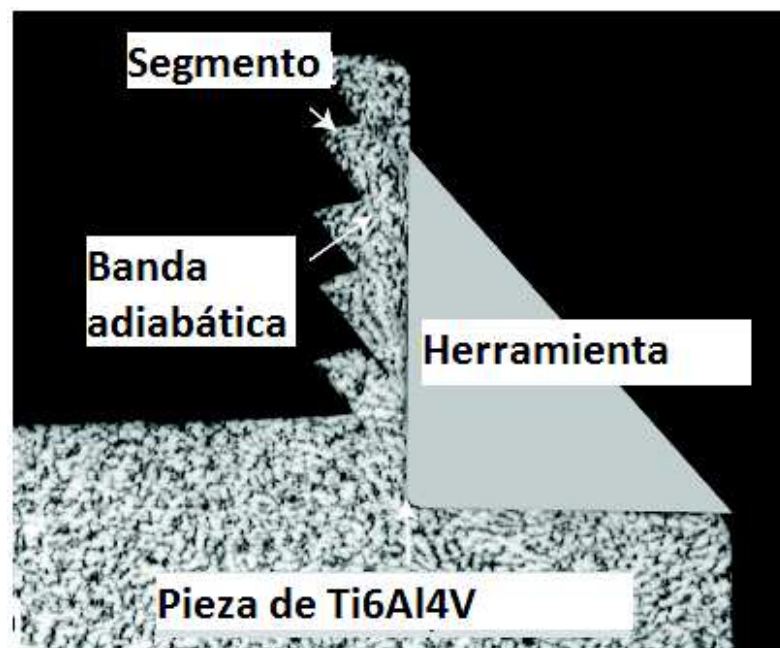


Figura 7.10: Micrografía de viruta segmentada tomada en un experimento de "parada rápida".

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

Un análisis detallado del proceso de corte de aleaciones metálicas revela que la competencia entre endurecimiento por deformación y el ablandamiento térmico en la zona de deformación primaria constituye una característica cíclica del proceso de formación de viruta dando lugar a la aparición de las denominadas bandas adiabáticas de cortadura. El carácter cíclico asociado a la formación de viruta tiene como consecuencia lógica que las fuerzas de corte varíen a lo largo de cada ciclo de formación de viruta.

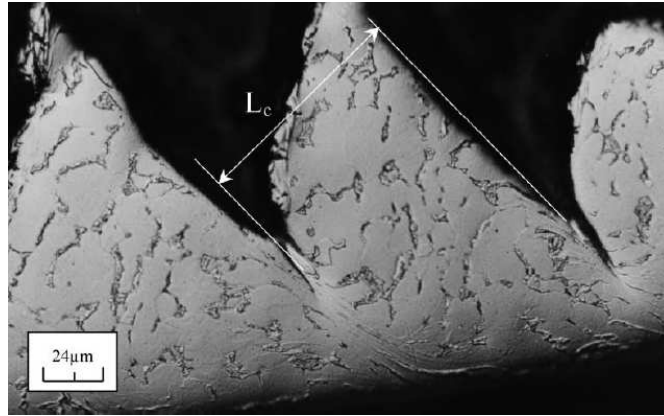
Estas bandas adiabáticas de cortadura son la manifestación de una inestabilidad termomecánica que resulta de la concentración de grandes deformaciones de cortadura en capas estrechas. La localización de la tensión de cortadura, que es evidente en la viruta segmentada, sólo puede ocurrir en la presencia de un mecanismo de ablandamiento que provoca que la deformación de una región ya deformada sea más fácil que la de una región no deformada ((45) y (23)). La localización de la deformación se acompaña de un acusado incremento local de la temperatura, que es una condición necesaria para la aparición de bandas adiabáticas de cortadura. En general, los metales sometidos a las bajas velocidades de deformación no manifiestan ningún efecto asociable a las bandas adiabáticas de cortadura, esto es debido a que la difusión del calor tiende a hacer que el campo de temperaturas sea uniforme en la pieza mecanizada. Sin embargo la aparición de viruta segmentada es más habitual en el mecanizado a altas velocidades de corte, este ablandamiento es a menudo atribuido a la subida de la temperatura causado por la disipación de energía asociado a la deformación plástica.

Otros investigadores proponen un mecanismo alternativo para la aparición de viruta segmentada, atribuyendo la segmentación, no a al efecto causado por la localización de la tensión de cortadura, sino más bien a las grietas que crecen en el material ((37) y (52)). En el pasado también se han realizado simulaciones por elementos finitos de este proceso ((38) y (4)).

### 7.1.3. Mecanizado de las aleaciones de titanio

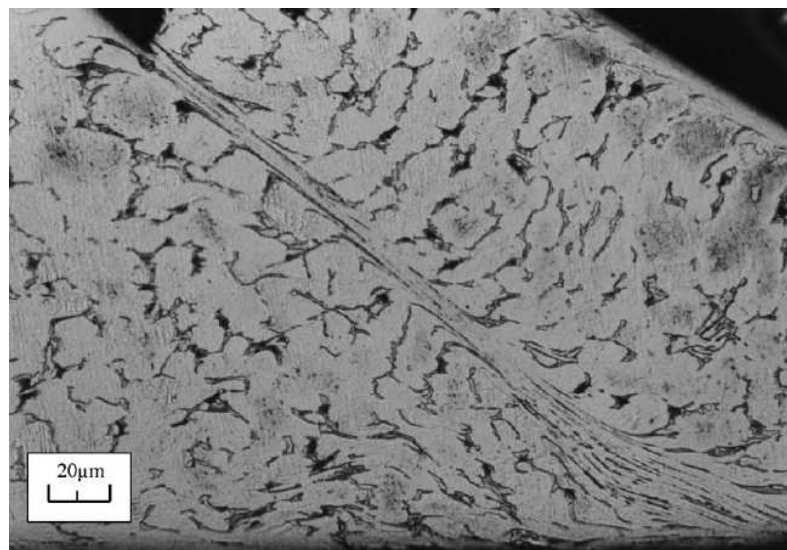
En las aleaciones de titanio, las bandas adiabáticas de cortadura se ven favorecidas por el bajo valor de la conductividad térmica que provoca una localización importante de la temperatura. Para velocidades bajas, la viruta segmentada está relacionada con el desarrollo de bandas adiabáticas de cortadura 7.11, que son la manifestación de la inestabilidad termomecánica descrita anteriormente. Sin embargo a estas velocidades de corte relativamente bajas, el proceso de la inestabilidad es débil, y la localización no es tan aguda como para altas velocidades.

Para velocidades de corte altas, las bandas adiabáticas de cortadura muestran un contorno mu-



**Figura 7.11:** Micrografía de viruta segmentada de Ti6Al4V obtenida en un ensayo de corte ortogonal a una velocidad de 1.2 m/s. (33)

cho más definido y marcado 7.12 aparentando ser banda de transformacion, en las que se haya producido una transformación de fase.



**Figura 7.12:** Micrografía de viruta segmentada de Ti6Al4V obtenida en un ensayo de corte ortogonal a una velocidad de 13 m/s. (33)

## 7.2. Ensayos De Corte Ortogonal

### 7.2.1. Dispositivo de ensayos

Los ensayos de corte ortogonal se llevaron a cabo en un torno Pinacho Smart turn 6/165. La máquina herramienta se equipó con un dinamómetro Kistler 9257B para la medida de fuerzas

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

de mecanizado.

La pieza de trabajo de aleación Ti6Al4V se utilizó con forma de disco de diámetro 150 mm y espesor 20 mm. Se mecanizaron varios anillos de espesor 2 mm (profundidad de pasada igual a 2 mm por tanto) para realizar corte ortogonal en cada uno de ellos, con un movimiento de avance de la herramienta perpendicular al eje de giro del torno, tal como se puede apreciar en la figura 7.13.

Se utilizaron plaquitas de corte de carburo de wolframio sin recubrimiento adecuadas para el mecanizado de aleaciones termorresistentes. En el mecanizado de este tipo de aleaciones se usan generalmente plaquitas recubiertas con el objetivo de mejorar el comportamiento frente a desgaste. Sin embargo el objetivo de estos ensayos no es evaluar el comportamiento frente a desgaste de la herramienta sino analizar fuerzas de corte y geometría de viruta que permita validar los resultados obtenidos mediante el modelado numérico. Los tiempos de corte se establecen de modo que el desgaste de la plaquita puede considerarse despreciable.

Se utilizaron plaquitas triangulares para operaciones de acabado del fabricante SECO. Las plaquitas se posicionaron horizontalmente en el portaherramientas con ángulo de desprendimiento resultante igual a  $0^\circ$  y ángulo de incidencia igual a  $7^\circ$ . El radio de filo era aproximadamente igual a  $25 \mu\text{m} \pm 5 \mu\text{m}$ . Se realizaron ensayos de corte en seco con avance igual a 0.05, 0.1 y 0.15 mm, con velocidades de corte en el rango 30-400  $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ .

### 7.2.2. Fuerzas de corte

Las fuerzas de mecanizado presentan oscilaciones debidas a la segmentación de la viruta. En la figura 7.14 se muestra un registro típico obtenido en el caso de avance 100 micras y velocidad de corte 120  $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ . El valor medio de las fuerzas de corte y de avance se obtiene de las zonas donde los valores de fuerzas se han estabilizado. Dichos valores se muestran en las figuras 7.15, 7.16 y 7.17 normalizados frente a la sección de viruta, es decir se presentan fuerzas específicas de corte y avance.

En las figuras 7.15, 7.16 y 7.17 se observa que las fuerzas específicas disminuyen con el avance a igualdad de profundidad de corte. Este hecho se debe a la influencia del radio de filo de la herramienta que se hace más patente para valores del avance del mismo orden. En este caso el



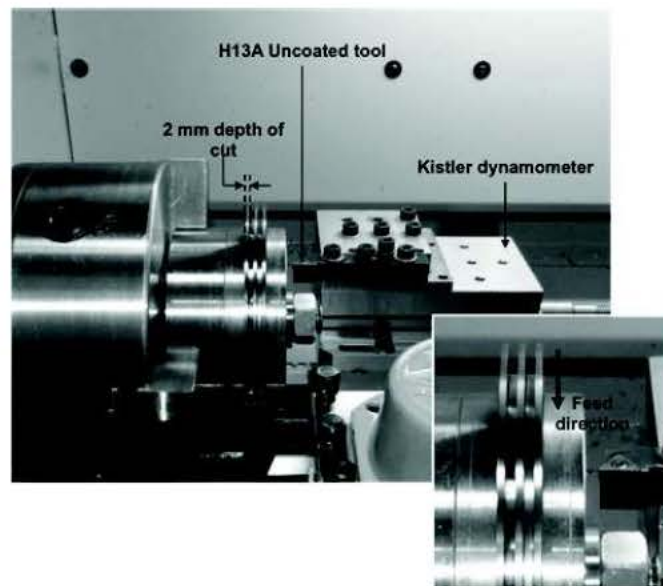


Figura 7.13: Pieza de trabajo y sistema de medida de fuerza situados en el torno. Detalle de la dirección de avance de la herramienta de corte

filo redondeado actúa como una herramienta de geometría localmente muy negativa, lo que se relaciona con fuerzas de corte mucho más elevadas y por tanto con mayores fuerzas específicas.

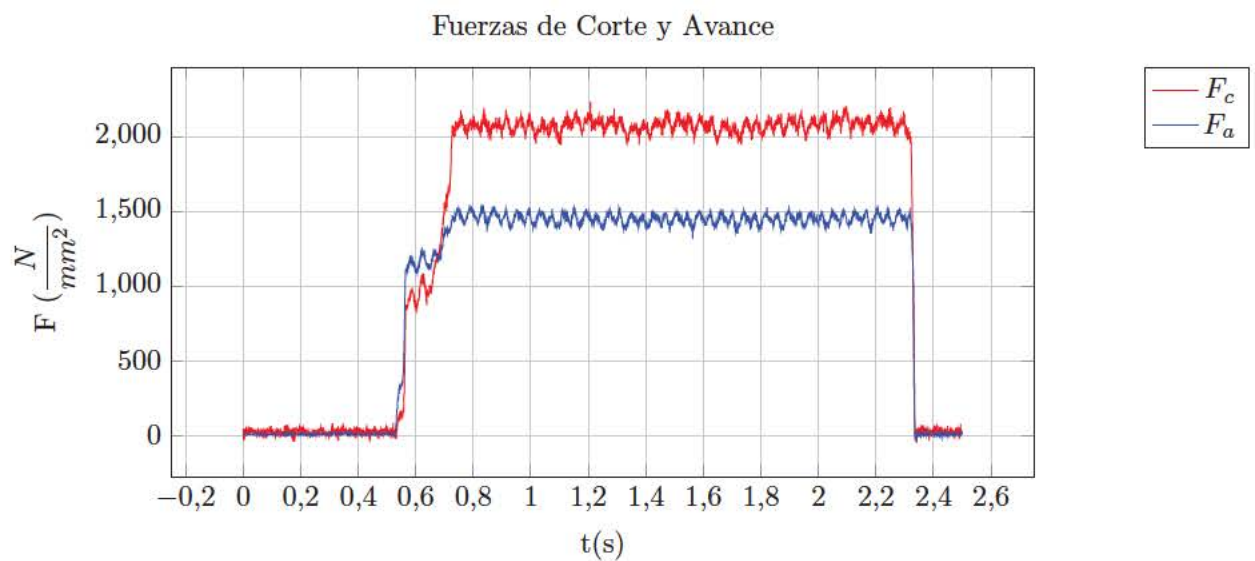


Figura 7.14: Fuerzas de corte y Avance correspondientes a un avance de 100 micras y velocidad de corte  $120 \frac{m}{min}$



## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

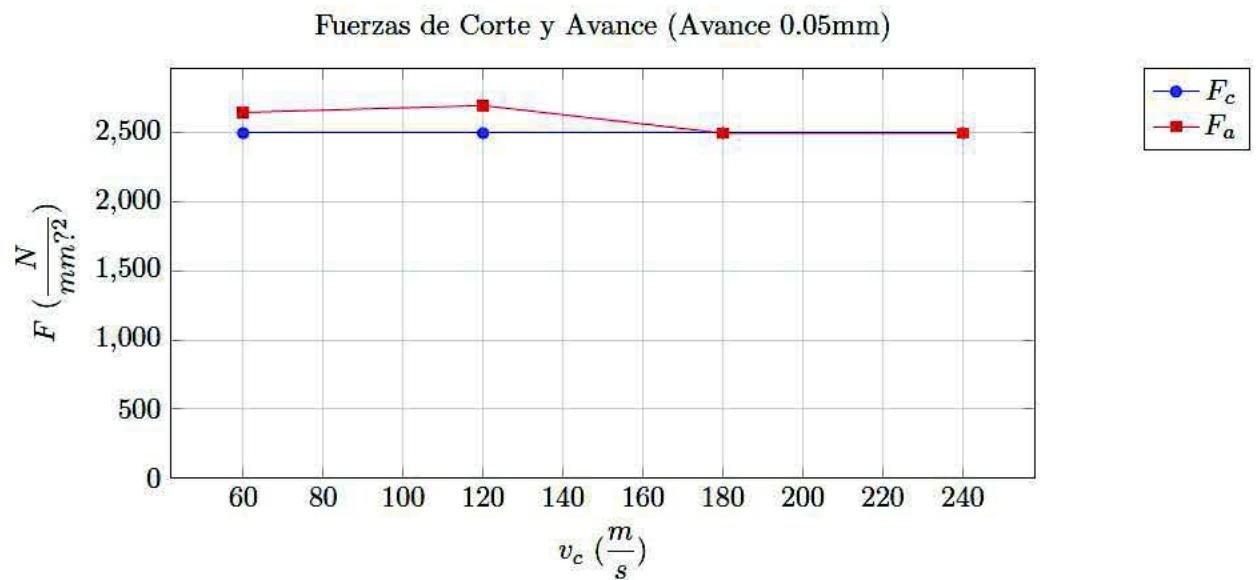


Figura 7.15: Fuerzas de corte y avance en función de la velocidad de corte para un avance de 0.05 mm

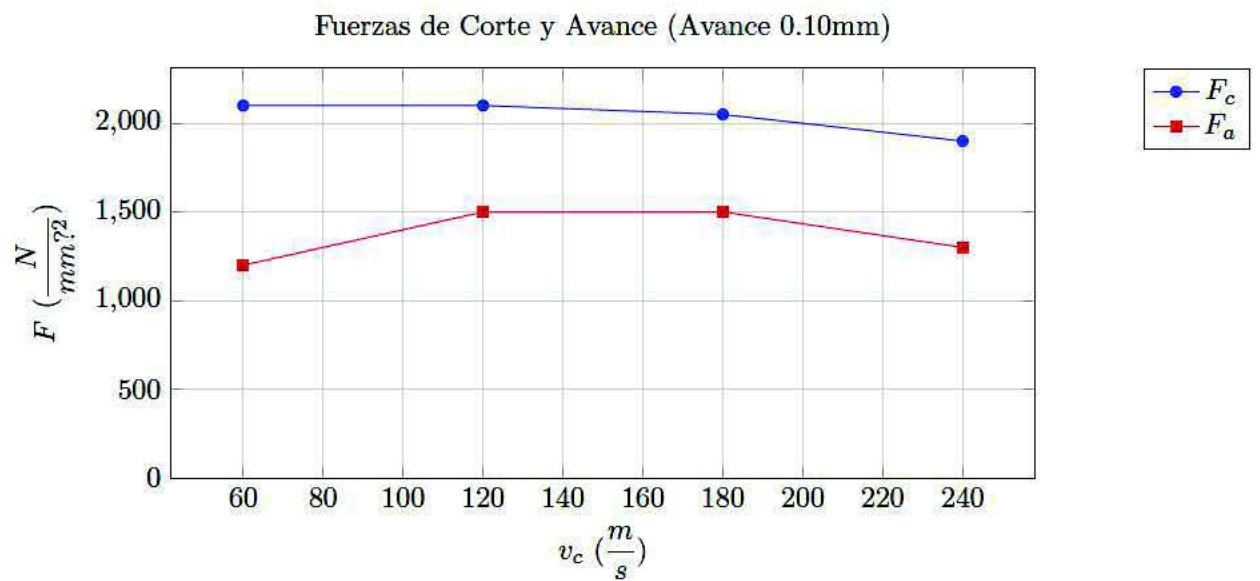
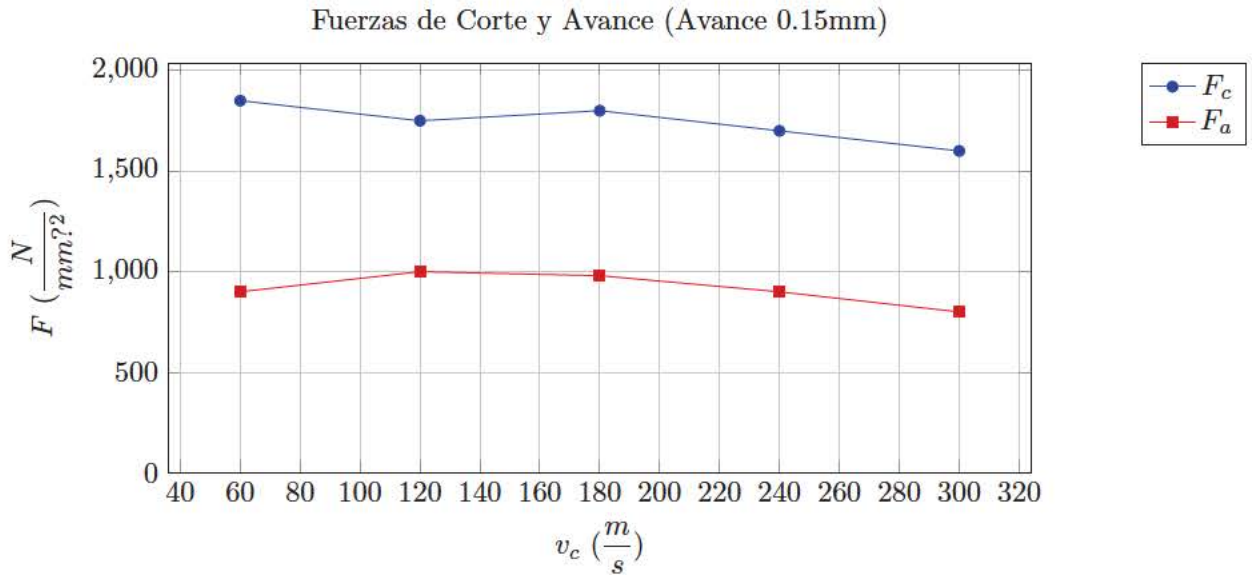


Figura 7.16: Fuerzas de corte y avance en función de la velocidad de corte para un avance de 0.10 mm



**Figura 7.17:** Fuerzas de corte y avance en función de la velocidad de corte para un avance de 0.15 mm

### 7.2.3. Morfología de viruta

El análisis de la morfología de la viruta generada mediante imágenes tomadas con microscopio óptico, permite obtener las magnitudes características de la misma.

En el caso de las aleaciones de Ti, la baja conductividad térmica lleva a un calentamiento localizado en la zona de corte primaria. El efecto del ablandamiento térmico se relaciona con la aparición de bandas adiabáticas de cortante que le confieren a la viruta su característico aspecto con dientes de sierra, desde velocidades de corte reducidas.

Los parámetros geométricos que caracterizan la viruta serrada se muestran en las figuras 7.18 para los casos correspondientes a los avances de 0.05mm, 0.10mm y 0.15mm y velocidad de corte 4m/s. La morfología de viruta se analiza en términos del espaciado entre bandas de cortadura ( $L_s$ ) y los valores de pico y valle ( $t_1$  y  $t_2$  respectivamente) del espesor de viruta deformada (ver figuras 7.18, 7.19 y 7.20).

La observación de la viruta al microscopio electrónico (previo ataque de la superficie) permite incluso observar la banda de cortante y medir aproximadamente su anchura.

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

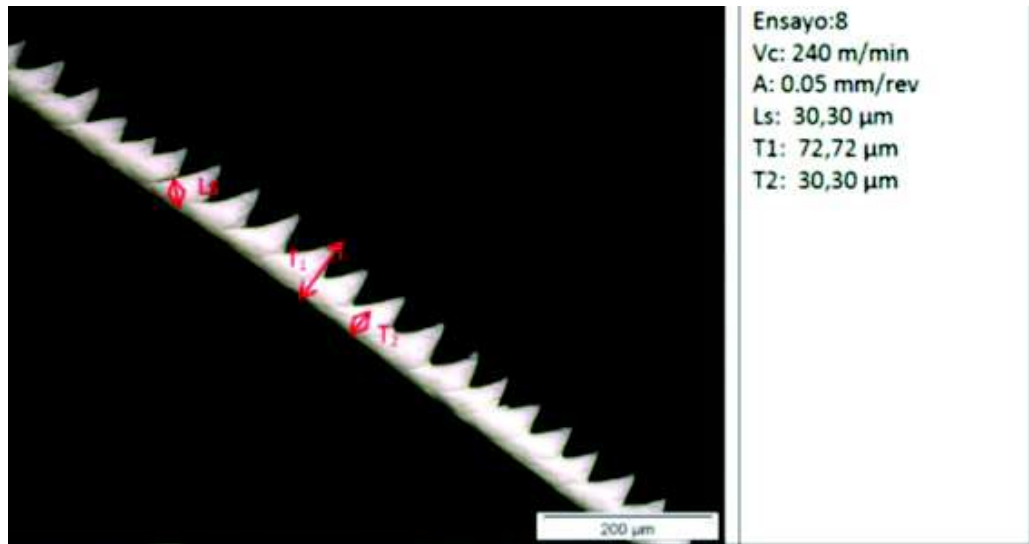


Figura 7.18: Morfología de viruta observada al microscopio indicando parámetros geométricos para cuantificar segmentación de la viruta (caso correspondiente al avance  $0.05\text{mm}$  y velocidad de corte  $4 \frac{m}{s}$ )

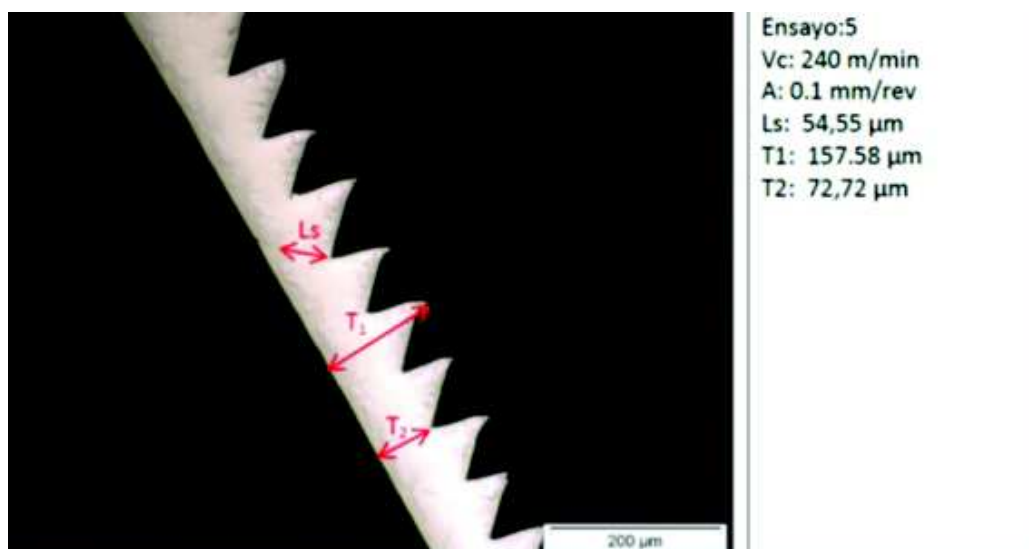
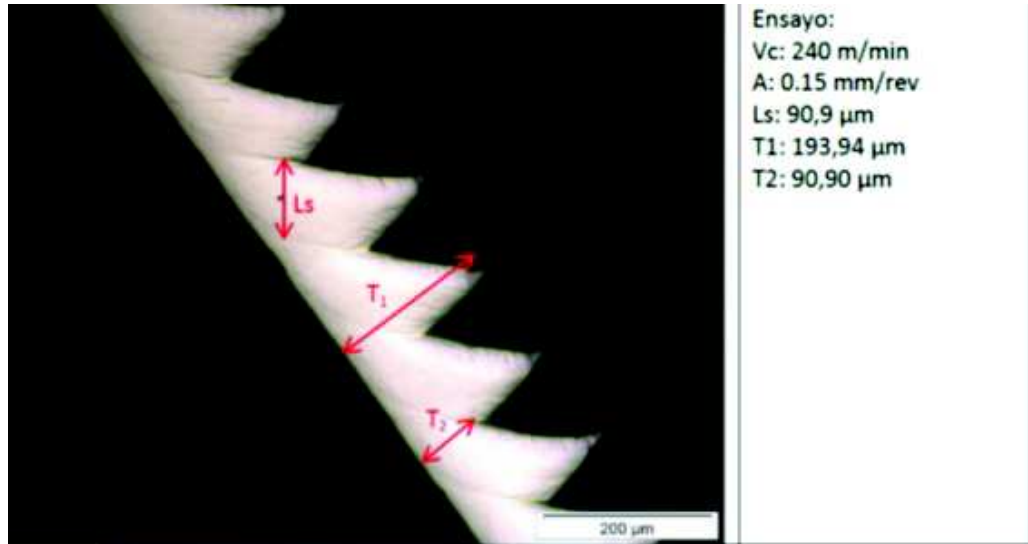


Figura 7.19: Morfología de viruta observada al microscopio indicando parámetros geométricos para cuantificar segmentación de la viruta (caso correspondiente al avance  $0.10\text{mm}$  y velocidad de corte  $4 \frac{m}{s}$ )



**Figura 7.20:** Morfología de viruta observada al microscopio indicando parámetros geométricos para cuantificar segmentación de la viruta (caso correspondiente al avance 0.15mm y velocidad de corte  $4 \frac{m}{s}$ )

Los parámetros geométricos obtenidos permitirán posteriormente su comparación con los obtenidos numéricamente utilizando los distintos modelos de fallo y daño implementados.

### 7.3. Modelo Numérico

El modelo numérico de corte ortogonal se ha desarrollado utilizando el código de elementos finitos ABAQUS/explicit. Dado que el proceso a simular lo permite, se ha desarrollado un modelo bidimensional que permite realizar una análisis termomecánico acoplado utilizando los elementos tipo CPE4R para deformación plana [Hibbit et al (21)].

La geometría básica del modelo, dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la figura 7.21. La pieza a mecanizar es fija en su base y la herramienta se desplaza con la velocidad de corte correspondiente. Se consideran condiciones de deformación plana, lo que es acorde con el caso real a simular, con una profundidad de pasada de 2mm, muy superior al valor del avance. El ángulo de desprendimiento de la herramienta, que es uno de los parámetros más influyentes en las fuerzas de corte y en la geometría de viruta es nulo. El radio del filo principal se considera nulo aunque en la práctica siempre existe un redondeo de filo aunque la plaquita sea nueva. Estos parámetros geométricos corresponden con las plaquitas de corte utilizadas en los ensayos.

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

Se utilizaron distintos tamaños de malla (que debe establecerse dependiendo del avance considerado) y se observó que con un tamaño de elemento alrededor de 6, 4 y 2 micras respectivamente se obtenía una solución de compromiso entre aproximación y eficiencia de cálculo para los avances de 0.15 mm, 0.10 mm y 0.05 mm respectivamente.

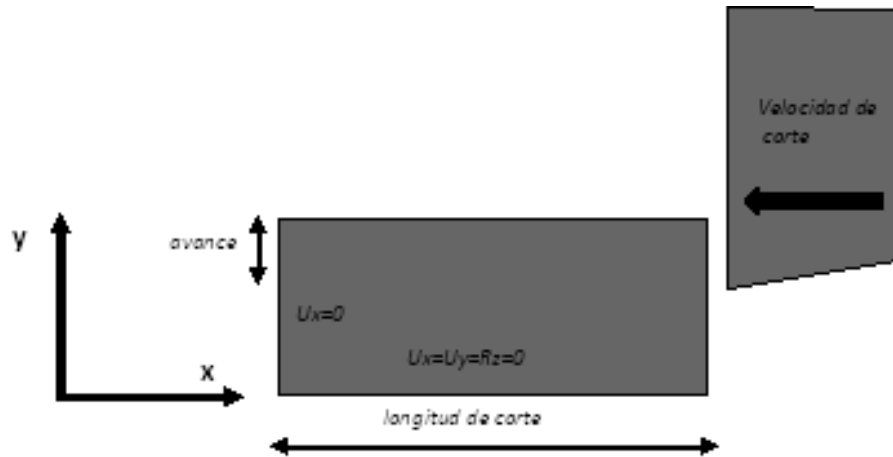


Figura 7.21: Esquema del modelo utilizado para la simulación del corte ortogonal, indicando condiciones de contorno

Las simulaciones se realizaron con todos los modelos de fallo y el modelo de daño isótropo descritos 2.4 Criterios de Fallo. En todos los casos se utilizaron los parámetros obtenidos a partir de los ensayos de impacto utilizados en la calibración de los modelos.

Se realizó la hipótesis de herramienta rígida y se supuso un comportamiento elasto viscoplástico en el caso de la pieza de trabajo, siguiendo una ecuación de plastificación conforme a la expresión propuesta por G.R. Johnson y W. H. Cook en 1983 (25) según la expresión 3.35.

Los parámetros de la función de plastificación utilizados son los propuestos por Meyer-Kleponis en (27) 3.3 (ver tabla 3.3) así como los restantes parámetros específicos de cada modelo de fallo son los mismos que los utilizados para la simulación de los caso de impacto documentados en 6 Calibración y Validación.

El valor del coeficiente de Quinney-Taylor se ha supuesto igual a  $\eta_{QT} = 0,9$ . La temperatura inicial para la pieza y herramienta se ha considerado igual a 293 ° K mientras que la temperatura

de fusión de la aleación es  $1933^{\circ}\text{K}$ .

El contacto en la interfase entre la viruta y la herramienta se simula mediante el modelo más simple de Coulomb con un coeficiente igual a 0.4, a pesar de su sencillez ha mostrado su adecuación a la simulación de problemas de corte ortogonal [Molinari et al (35) y (34)].

### 7.3.1. Resultados numéricos

Se han llevado a cabo las simulaciones de los casos experimentales utilizando los diferentes modelos de fallo y daño descritos en 2.4 Criterios de Fallo. En las figuras 7.22 a 7.27 se muestran las geometrías de viruta obtenidas con los distintos modelos para el caso correspondiente a los avances 0.05, 0.10 y 0.15 mm y velocidad de corte 4 m/s.

Las figuras 7.22, 7.24 y 7.26 muestran los campos de deformación plástica equivalente indicativos de la formación de bandas adiabáticas de cortante. Se observa que la morfología de viruta que proporcionan los distintos modelos implementados es similar y también que todos ellos reproducen de forma bastante aproximada el caso experimental.

Esta buena correspondencia entre los modelos y los casos experimentales se ha observado también a otros avances y velocidades de corte. Se observan algunas diferencias siendo el modelo de daño el que más se aproxima en cuanto a índice de segmentación con menores valores de  $t_2$  que el resto de los modelos.

En las figuras 7.23, 7.25 y 7.27 se muestra el campo de temperatura normalizada. Se observa que todos los modelos de fallo proporcionan valores similares mientras que en el caso del modelo de daño los valores son algo menores. En este último caso el efecto del ablandamiento térmico se combina con el daño mecánico para producir segmentación lo que está en consonancia con las observaciones experimentales. Por ejemplo es habitual encontrar segmentación en ensayos a velocidades más bajas que la velocidad a la que predicen segmentación los modelos numéricos debido a fenómenos relacionados con el daño.



## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

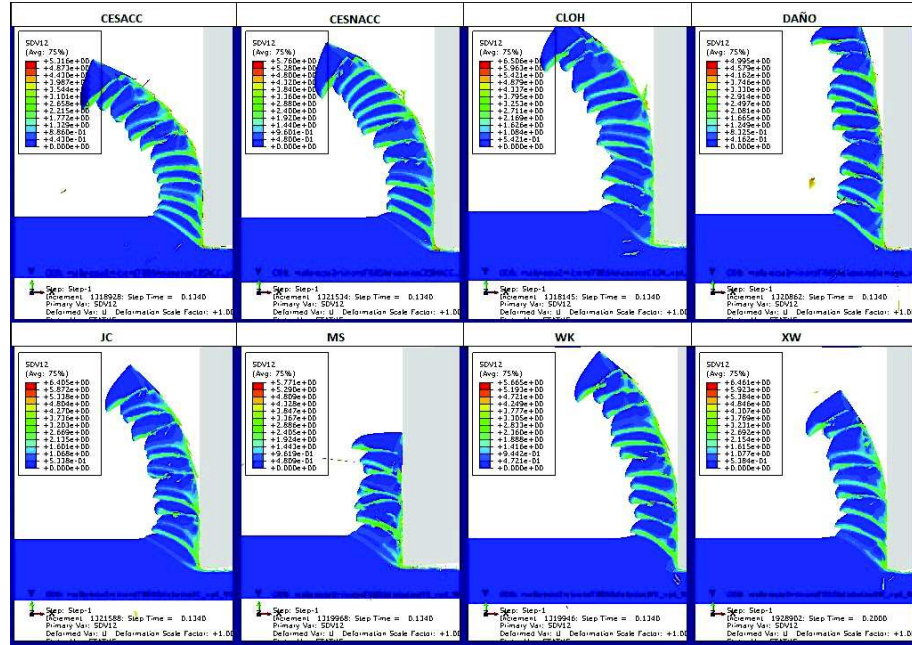


Figura 7.22: Campo de deformación plástica equivalente en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$  y un avance de 0.050 mm.

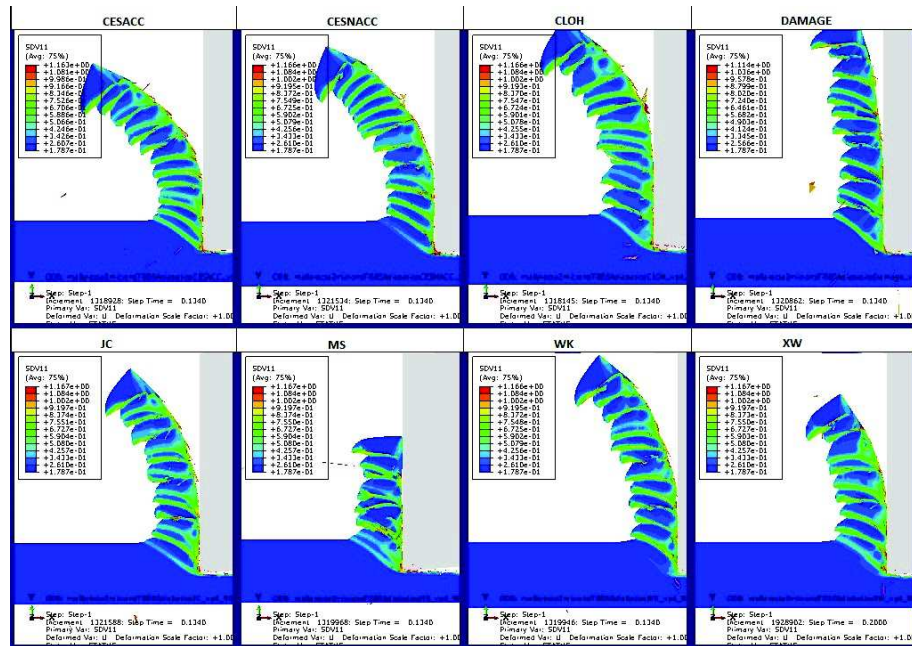


Figura 7.23: Campo de temperatura normalizada en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$  y un avance de 0.050 mm.

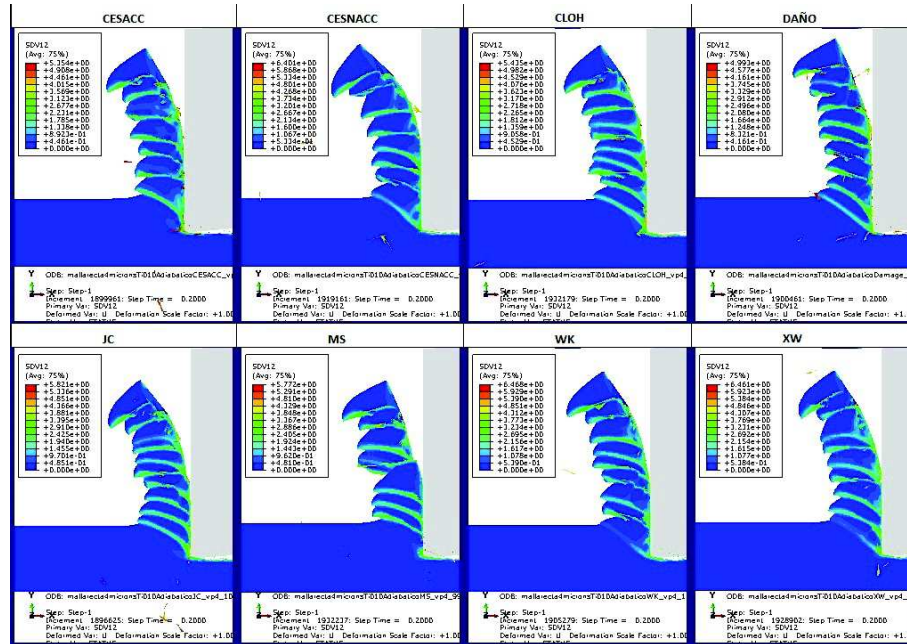


Figura 7.24: Campo de deformación plástica equivalente en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$  y un avance de 0.10 mm.

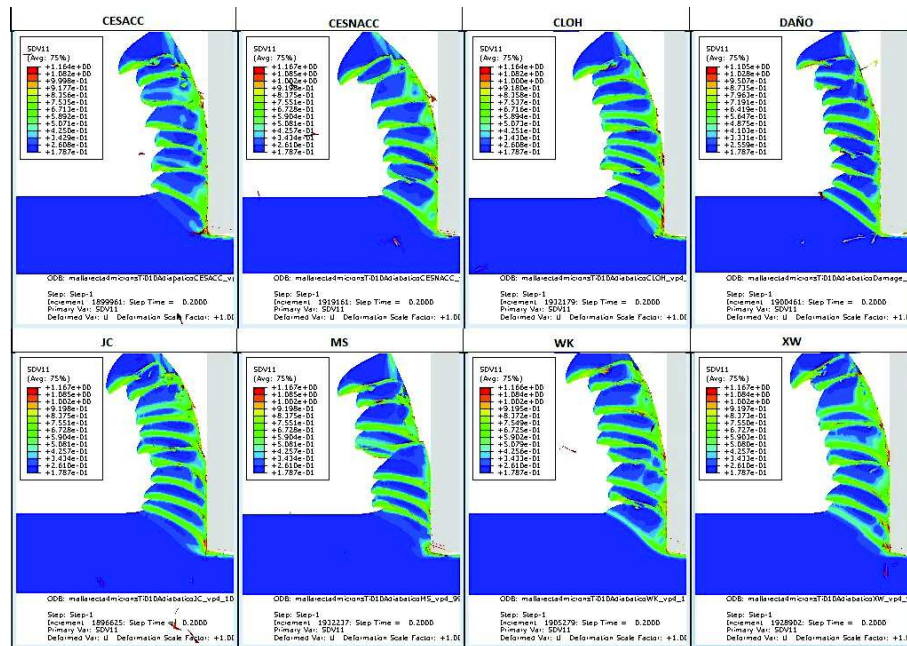


Figura 7.25: Campo de temperatura normalizada en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$  y un avance de 0.10 mm.



## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

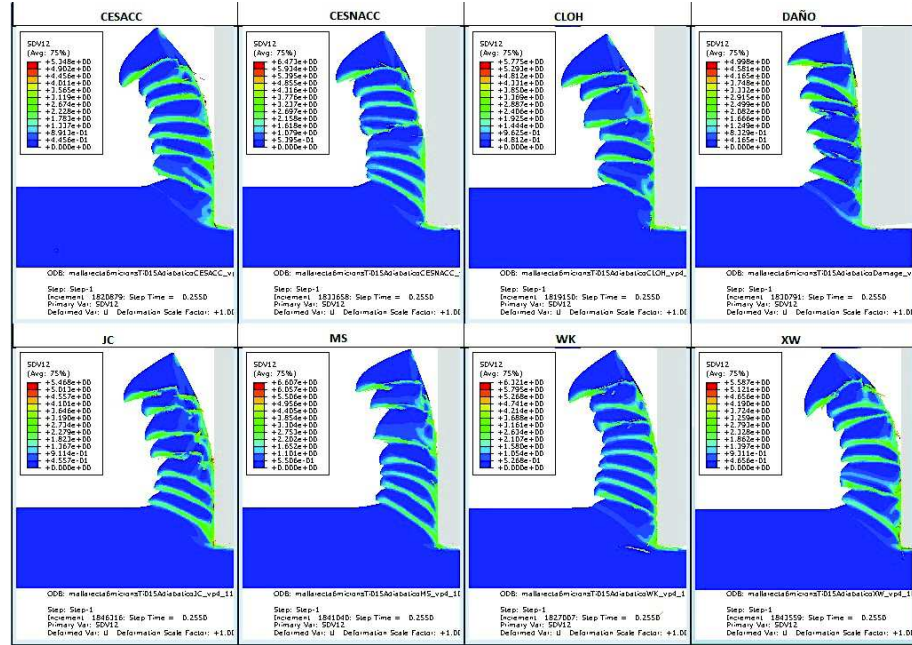


Figura 7.26: Campo de deformación plástica equivalente en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$  y un avance de 0.150 mm.

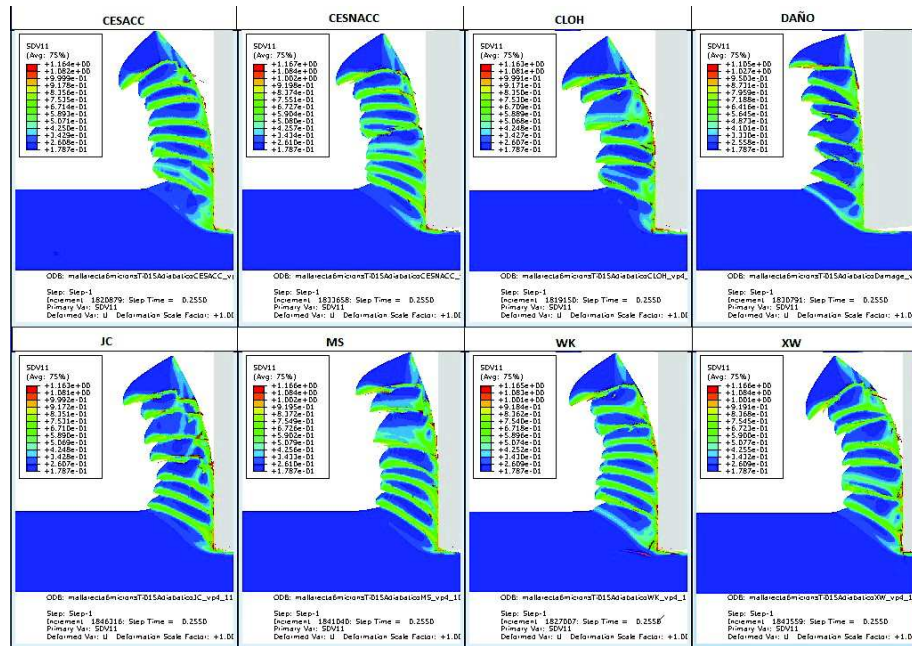


Figura 7.27: Campo de temperatura normalizada en la segmentación de la viruta mostrada por las simulaciones según diferentes criterios de fallo para una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$  y un avance de 0.150 mm.

En las tablas 7.1, 7.2 y 7.3 se resumen las fuerzas de corte y avance medias y los parámetros geométricos representativos de la morfología de viruta, incluyendo el índice de segmentación  $SI = \frac{t_1 - t_2}{t_1}$ .

Se observa una adecuación razonable en cuanto a las fuerzas de mecanizado (es preciso tener en cuenta que se ha utilizado una ecuación constitutiva obtenida de la literatura y no se han realizado ensayos dinámicos para caracterizar el material). Los modelos numéricos en general minusvaloran la fuerza de avance, especialmente a avances reducidos debido al efecto del radio de filo que no se ha tenido en cuenta en el modelo numérico. Este hecho tiene también efecto en la fuerza de corte: para el avance de 0.050 mm la fuerza de corte que proporciona el modelo es inferior a la experimental mientras que para los avances de 0.100 y 0.150 mm es superior.

Avance 0.05 mm. Velocidad de corte $4 \frac{m}{s}$						
Criterio	$F_c$	$F_t$	$t_1$	$t_2$	$L_s$	SI
CESACC	115	45	70	60	25	0.143
CESNACC	118	46	72	66	26	0.083
CLOH	110	39	73	63	27	0.137
DAMAGE	100	34	67	50	27	0.254
JC	115	46	72	56	23	0.222
MS	107	40	72	69		0.042
WK	105	38	71	61	25	0.141
XW	114	38	71	55	60	0.225
EXPERIMENTAL	125	120	72	30	30	0.583

Tabla 7.1: Datos de corte para un avance de 0.05mm y una velocidad de corte de  $4 \frac{m}{s}$

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

Avance 0.10 mm. Velocidad de corte $4\frac{m}{s}$						
Criterio	$F_c$	$F_t$	$t_1$	$t_2$	$L_s$	SI
CESACC	220	80	145	112	68	0.228
CESNACC	225	80	135	116	58	0.141
CLOH	227	83	140	128	45	0.086
DAMAGE	194	70	135	102	50	0.244
JC	222	75	145	128	45	0.117
MS	214	75	145	128	58	0.117
WK	215	75	150	127	50	0.153
XW	215	77	148	131	52	0.115
EXPERIMENTAL	190	130	157	73	54	0.535

Tabla 7.2: Datos de corte para un avance de 0.10 mm y una velocidad de corte de  $4\frac{m}{s}$

Avance 0.15 mm. Velocidad de corte $4\frac{m}{s}$						
Criterio	$F_c$	$F_t$	$t_1$	$t_2$	$L_s$	SI
CESACC	330	130	218	192	70	0.119
CESNACC	355	120	220	187	65	0.15
CLOH	350	125	230	178	77	0.226
DAMAGE	305	100	200	137	72	0.315
JC	345	130	230	175	85	0.239
MS	335	130	220	185	62	0.159
WK	330	126	215	187	60	0.130
XW	341	130	215	182	70	0.153
EXPERIMENTAL	255	135	194	91	90	0.53

Tabla 7.3: Datos de corte para un avance de 0.15mm y una velocidad de corte de  $4\frac{m}{s}$

## 7.4. Conclusiones

Los modelos implementados simulan la segmentación de viruta sin necesidad de una forma especial de la malla con inclinación de los elementos según el ángulo de cizalladura.

Las fuerzas de corte se predicen de forma bastante razonable aunque se observan diferencias que están dentro de lo que es habitual en los procesos de corte y se pueden atribuir a distintos factores como diferencias en el coeficiente de fricción implementado y el real, parámetros de la ecuación constitutiva no obtenidos directamente sobre el material objeto de estudio, y efecto del radio de filo entre otros.

El modelo que mejor aproxima la morfología de viruta es el de daño que simula mayor índice de segmentación que los demás modelos de fallo. Además las temperaturas son menores lo que se relaciona con el acoplamiento del daño que contribuye a la formación de la banda de cortadura.

Se puede concluir que los modelos implementados permiten simular con razonable aproximación el corte ortogonal de la aleación Ti6Al4V. La calibración a partir de ensayos de impacto proporciona valores de los parámetros de los modelos aplicables a la simulación del corte. Este hecho simplifica el problema de la identificación de parámetros desde ensayos de corte que supone siempre un trabajo más laborioso de experimentación y de análisis de las virutas generadas.

## 7. APLICACIÓN AL CORTE ORTOGONAL

---

## 8

# Conclusiones y Trabajos Futuros

### 8.1. Conclusiones

Para una comprensión adecuada del comportamiento de las aleaciones metálicas en un amplio rango de temperaturas y velocidades de deformación así como en condiciones de carga complejas se ha planteado un modelo constitutivo que recoge adecuadamente el comportamiento del material teniendo en cuenta los siguientes fenómenos:

- La historia de deformaciones plásticas y en particular el endurecimiento isótropo y el endurecimiento cinemático.
- Los efectos térmicos tales como el ablandamiento térmico y la dilatación térmica.
- Los efectos viscoplásticos como el efecto del endurecimiento debido a la velocidad de deformación.
- Los mecanismos o procesos que provocan el deterioro progresivo o daño del material durante su deformación y conducen al fallo.

En esta Tesis nos hemos basado en el modelo de fallo por daño propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32). El procedimiento de integración de este modelo tal y como lo plantean sus autores conlleva una gran complejidad además de ser computacionalmente poco eficiente en comparación con otros modelos de fallo al requerir calcular e invertir en cada iteración de cada paso temporal una matriz Jacobiano de un tamaño considerable (28x28). Esto se debe a que tratan de resolver de manera similar los cuatro modelos de daño que proponen (daño isótropo y anisótropo con y sin Efecto de Cierre de Microdefectos (“Micro-defects Closure Effect”)).

## 8. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

El trabajo realizado en esta Tesis se ha centrado en el modelo de daño isótropo sin Efecto de Cierre de Microdefectos. Para este caso en particular se ha desarrollado un algoritmo de integración equivalente al propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) pero mucho más eficiente desde el punto de vista computacional ya que requiere calcular e invertir en cada iteración de cada paso temporal una matriz Jacobiano de un tamaño reducido ( $3 \times 3$  en el caso adiabático o  $2 \times 2$  en el caso no adiabático) que permite obtener resultados fiables en tiempos razonables. Este nuevo algoritmo es mucho más sencillo y eficiente, desde el punto de vista computacional, que el propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat lo que permite analizar la aplicabilidad y la validez de este modelo de fallo a diversos problemas, en concreto en esta Tesis se ha aplicado al estudio del impacto a alta velocidad y mecanizado a alta velocidad de corte.

También se ha comparado con otros modelos de fallo propuestos por otros autores. Para ello se ha utilizado el código de elementos finitos ABAQUS y se ha implementado la subrutina VUMAT con el objeto de ajustar y validar diferentes criterios de fallo, además del de daño isótropo, en los que el deterioro del material no está acoplado con el comportamiento mecánico del material ajustando los resultados de las simulaciones de ensayos de impacto a los resultados experimentales obtenidos en esta Tesis Doctoral.

El trabajo desarrollado en esta se resume en:

- Formulación e implementación dentro de un código de elementos finitos comercial un algoritmo de integración numérica, eficiente desde el punto de vista computacional, del modelo de daño isótropo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32).
- Extensión del modelo de daño isótropo propuesto por J. Lemaitre y R. Desmorat (32) a condiciones no isotermas
- Implementación de distintos modelos de fallo dúctil dentro de un código de elementos finitos, incluido el daño isótropo, que permita la evaluación, validación y comparación de los mismos aplicados a problemas de impacto a alta velocidad.
- Calibración y ajuste de los parámetros que caracterizan cada modelo de fallo para, en la medida de lo posible, hacer coincidir los resultados de las simulaciones con los resultados experimentales obtenidos en ensayos de impacto a alta velocidad

- Análisis y comparación de los resultados obtenidos por cada uno de los modelos de fallo implementados

Las aportaciones originales que se pueden extraer de esta Tesis Doctoral son:

- Se ha simplificado notablemente el algoritmo implícito de integración para un modelo constitutivo termoviscoplastico completamente acoplado con el modelo de daño isótropo propuesto por Lemaitre y Desmorat. El algoritmo propuesto requiere la construcción de una matriz Jacobiana de tamaño reducido ( $3 \times 3$ ) en lugar de la matriz Jacobiana propuesta por Lemaitre y Desmorat ( $28 \times 28$ )
- El algoritmo de integración desarrollado incorpora al modelo propuesto por Lemaitre y Desmorat los efectos térmicos que no son desarrollados explícitamente por estos autores. En particular se incluye la dilatación térmica y el ablandamiento térmico.
- El algoritmo de integración desarrollado es de uso general siendo por tanto válido para estados de carga tridimensionales y aplicable a modelos constitutivos viscoplasticos incluyendo el endurecimiento isótropo y cinemático, así como los efectos de la velocidad de deformación y daño isótropo.
- El algoritmo desarrollado puede ser directamente aplicable a modelos constitutivos que consideren simultáneamente el endurecimiento isótropo y el cinemático sin necesidad de incluir daño, siendo el coste computacional similar al del algoritmo clásico de retorno radial que considera el endurecimiento isótropo exclusivamente.
- El esquema de integración numérica propuesto en esta Tesis Doctoral se ha aplicado con éxito a la simulación de ensayos de impacto de alta velocidad. Para ello se ha empleado la subrutina de usuario VUMAT disponibles en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/explicit, demostrando su eficacia y robustez.
- Se ha formulado una expresión para el operador tangente consistente con el algoritmo de integración.
- El esquema de integración numérica propuesto en esta Tesis Doctoral se ha extendido para implementar otros modelos o criterios de fallo en los que el deterioro del material no está acoplado con el comportamiento mecánico como ocurre con el daño isótropo.

Respecto a la simulación de los impactos a alta velocidad, los resultados ofrecidos por el criterio de fallo por daño isótropo es el que mejor se ajusta a los resultados experimentales en



## 8. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

todo el rango de velocidades de impacto ensayadas si bien el tiempo de cálculo es sensiblemente superior al que ofrecen otros criterios de fallo, pero estimamos que también debe ser muy inferior al tiempo de cálculo que se obtendría de haber seguido la aproximación propuesta por J. Lemaitre y R. Desmorat (32).

### 8.2. Trabajos Futuros

El trabajo realizado en esta Tesis Doctoral va a servir de base para el modelado de otros procesos dinámicos como es el caso del mecanizado. El grupo de investigación en el que se ha realizado la Tesis Doctoral desarrolla una línea de estudio de mecanizado de aleaciones termorresistentes en la que se utilizarán las subrutinas y otras aplicaciones software que se han implementado a lo largo del desarrollo de esta Tesis.

En esta Tesis Doctoral se han aplicado los modelos implementados a la simulación del corte ortogonal de la aleación Ti6Al4V, analizando la influencia del criterio de fallo en las fuerzas de corte y la morfología de viruta.

Se profundizará en dicho estudio analizando la influencia de los modelos también en el proceso de generación de bandas de cortadura.

Asimismo se ampliará el estudio aplicando los modelos de fallo y daño implementados a la caracterización de aleaciones de Ni y al análisis del corte de dichas aleaciones, que presentan un gran endurecimiento por deformación y en consecuencia baja maquinabilidad.

# Bibliografía

- [1] ABAQUS. User's manual. *Richmond, USA*, -(·)-, 2003. 94
- [2] F. H. Aboutalebi, M. Farzin, and M. Mashayekhi. Numerical predictions and experimental validations of ductile damage evolution in sheet metal forming processes. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 25 Issue 6:638–650, 2012. 14
- [3] A.S. Argon, J. Im, and R. Safoglu. Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *Metallurgical Transactions*, 6A:825–837, 1975. 25
- [4] M. Baker, J. Rosler, and C. Siemers. Finite element simulation of segmented chip formation of ti6al4v. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 124:485, 2002. 168
- [5] Yingbin Bao. Prediction of ductile crack formation in uncracked bodies. *Ph. D. thesis, Cambridge, MA: Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology*, 2003. 93
- [6] Yingbin Bao. Dependence of ductile crack formation in tensile tests on stress triaxiality, stress and strain ratios. *Engineering Fracture Mechanics*, 72:505–522, 2005. 18
- [7] Yingbin Bao and Tomasz Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46:81–98, 2004. 18
- [8] T. Borvik, O.S. Hopperstad, T. Berstad, and M. Langseth. A computational model of visco-plasticity and ductile damage for impact and penetration. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20:685–712, 2001. 18
- [9] T. Borvik, O.S. Hopperstad, and T. Berstad. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. *Part II. Numerical simulations, European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22:15–32, 2003. 18
- [10] B.L. Boyce, X. Chen, J.O. Peters, J.H. Hutchinson, and R.O. Ritchie. Mechanical relaxation of localized residual stresses associated with foreign object damage. *Materials Science and Engineering*, A349(-):48–58, 2003. 52
- [11] P. W. Bridgman. Studies in large plastic flow and fracture with special emphasis on the effects of hydrostatic pressure. *McGraw-Hill, New York*, 1952. 26
- [12] P. Brozzo, B. Deluca, and R. Rendina. A new method for the prediction of formability in metal sheet, sheet metal forming and formability. *Proceeding of the 7th Biennial Conference of the IDDRG*, 1972. 23
- [13] S.E. Clift, P. Hartley, C.E.N. Sturgess, and G.W. Rowe. Fracture prediction in plastic deformation processes. *Int. J. Mech. Sci.*, 32:1–17, 1990. 23
- [14] M. G. Cockcroft and D. J. Latham. Ductility and workability of metals. *J Institute of Metals*, 96:33 – 39, 1968. 23
- [15] I. Doghri. Mechanics of deformable solids: Linear and nonlinear, analytical and computational aspects. *springer, berlin*. -, -(·)-, 2000. 61
- [16] Hegedüs Ferenc, Roland Brüttsch, Brian Oliver, and Pierre Marmy. Fracture toughness and tensile properties of the titanium alloys ti6al4v and ti5al2.5sn before and after proton and neutron irradiations at 150°C. *Centre de Recherches en Physique des Plasmas*, 789, 2004. 139
- [17] A. L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i- yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Eng. Mater. Technol.*, 99:2–15, 1977. 13
- [18] J.W. Hancock and A.C. Mackenzie. On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multiaxial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24:147–169, 1976. 26
- [19] O. M. Heeres. Modern strategies for the numerical modelling of the cyclic and transient behaviour of soil. *Ph. D. thesis, Delft University of Technology*, 2001. 12
- [20] F. Hegedüs, R. Brüttsch, B. Oliver, and P. Marmy. A criterion for ductile fracture by growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35:363–371, 1968. 26
- [21] Hibbit, Karlson, and Sorensen. Theory of formation of metal chips. *ABAQUS User's Manual 6.4-1*, 2003. 175
- [22] O. S. Hopperstad, T. Borvik, M. Langseth, K. Labibes, and C. Albertini. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. *Part I. Experiments. European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22:1–13, 2003. 18
- [23] Z.B. Hou and R. Komanduri. Modeling of thermomechanical shear instability in machining. *Int. J. Mech. Sci.*, 39:1273, 1997. 168

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [24] T. J. R. Hughes. Numerical implementation of constitutive models: Rate-independent deviatoric plasticity. *NEMAT-NASSER, S., ASARO, R.J., and HEGEMIER, G.A. (eds.)*, Theoretical Foundation for Large-Scale Computations of Nonlinear Material behaviour: Martinus Nijhoff Publishers, 1983. 61
- [25] G. R. Johnson and W. H. Cook. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates, and temperatures. *Proceedings of 7th International Symposium Ballistics. The Hague, The Netherlands*, pages 541–547, 1983. 72, 176
- [26] G.R. Johnson and W.H. Cook. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures, and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21:31–48, 1985. 27
- [27] H.W. Meyer Jr. and D. S. Kleponis. Modeling the high strain rate behavior of titanium undergoing ballistic impact and penetration. *International Journal of Impact Engineering*, 26:509–521, 2001. 48, 176
- [28] Rice J.R. and Tracey D.M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17:201–217, 1969. 18, 26
- [29] A. R. Khoei and M. Eghbalian. Numerical simulation of cyclic behaviour of ductile metals with a coupled damage-viscoplasticity model. *Computational Materials Science*, 55:376–389, 2012. doi: 10.1016/j.commatsci.2011.12.008. 15
- [30] Y.K. Ko, J.S. Lee, H. Huh, H.K. Kim, and S.H. Park. Prediction of fracture in hubhole expanding process using a new ductile fracture criterion. *J. Mater. Process. Technol.*, 187 a 188:358–362, 2007. 23
- [31] Th. Lehmann. Anisotrope plastische formänderungen. *Rheologica Acta*, 3:Issue 4; pp 281–285, 1964. doi: 10.1007/BF02096162. 58, 62
- [32] J. Lemaitre and R. Desmorat. Engineering damage mechanics. ductile, creep, fatigue and brittle failures. *Springer*, 2005. III, III, III, IV, V, V, V, 2, 4, 6, 10, 11, 14, 30, 33, 44, 48, 49, 64, 65, 185, 186, 188
- [33] A. Molinari, C. Musquar, and G. Sutter. Adiabatic shear banding in high speed machining of ti-6al-4v: experiments and modeling. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 124:485, 2002. XIV, XIV, 169
- [34] A. Molinari, R. Cheriguene, and H. Miguelez. Numerical and analytical modeling of orthogonal cutting: The link between local variables and global contact characteristics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53:183–206, 2011. 177
- [35] A. Molinari, R. Cheriguene, and H. Miguelez. Contact variables and thermal effects at the tool-chip interface in orthogonal cutting. *Int. J. Solids and Structures*, 49:3774–3796, 2012. 177
- [36] J. C. Nagtegaal and J. E. Jong. Some aspects of nonisotropic work hardening in finite strain plasticity. *Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and Computation*, 65:Stanford University Press, 1982. 58, 62
- [37] K. Nakayama. The formation of saw toothed chips. *Proc. Int. Conf. on Prod. Eng. Tokyo*, 1974. 168
- [38] T. Obikawa and E. Usui. Computational machining of titanium alloy-finite element modeling and a few results. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 118:208, 1996. 168
- [39] S. Oh, C.C. Chen, and S. Kobayashi. Ductile failure in axisymmetric extrusion and drawing, part 2, workability in extrusion and drawing. *J. Eng. Ind.*, 101:36–44, 1979. 23
- [40] M. Ortiz and E. P. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21:Issue 9, 1561–1576, 1985. 66
- [41] M. Oyane, T. Sato, K. Okimoto, and S. Shima. Criteria for ductile fracture and their application. *J. Mech. Work. Technol.*, 4:65–81, 1980. 23
- [42] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in applied mechanics*, 9:244–368, 1966. 12
- [43] V. Piispanen. Theory of formation of metal chips. *J. Applied Physics*, 19, No. 10:876, 1948. 163
- [44] H. L. D. Pugh and D. Green. The effect of hydrostatic pressure on the plastic flow and fracture of metals. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 179, 1964. 23
- [45] R.F. Recht. A dynamic analysis of high speed machining. *ASME J. of Eng. for Ind.*, 309:485, 1985. 168
- [46] M. Ristinmaa and N. S. Ottosen. Consequences of dynamic yield surface in viscoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 37:4601–4622, 2000. 12
- [47] D.A. Stephenson and J.S. Agapiou. Metal cutting theory and practice. *2nd edn. CRC Press, FL.*, 2005. 161
- [48] X. Teng and T. Wierzbicki. Evaluation of six fracture models in high velocity perforation. *Engineering Fracture Mechanics*, 73:1653–1678, 2006. 93
- [49] C. Truesdell and R. A. Toupin. The classical field theories. *Encyclopedia of Physics. Springer-Verlag, Berlin*, Vol III, 1960. 62
- [50] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32:157–169, 1984. 13
- [51] G. Vadillo, R. Zaera, and J. Fernández-Sáez. Consistent integration of the constitutive equations of gurson materials under adiabatic conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1280–1295, 2008. 14
- [52] A. Vyas and M.C. Shaw. Mechanics of saw-tooth chip formation in metal cutting. *J. of Manufacturing Science and Engineering*, 121:165, 1999. 168

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [53] W. M. Wang. Stationary and propagative instabilities in metals. a computational point of view. *Ph. D. thesis, Delft University of Technology*, 1997. 12
- [54] W. M. Wang, L. J. Sluys, and R. de Borst. Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 40:3839–3864, 1997. 12
- [55] T. Wierzbicki and L. Xue. On the effect of the third invariant of the stress deviator on ductile fracture. impact and crashworthiness lab. *International Journal of Fracture*, Report 136, 2005. 28
- [56] Tomasz Wierzbicki, Yingbin Bao, Young-Woong Lee, and Yuanli Bai. Calibration and evaluation of seven fracture models. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47:719–743, 2005. 28, 93
- [57] A. Winnicki, C. J. Pearce, and N. Bicanic. Viscoplastic hoffman consistency model for concrete. *Computers and Structures*, 79:7–19, 2001. 12
- [58] R. Zaera and J. Fernández-Sáez. An implicit consistent algorithm for the integration of thermoviscoplastic constitutive equations in adiabatic conditions and finite deformations. *International Journal of Solids and Structures*, 43:1594–1612, 2006. 12, 69
- [59] N.N. Zorev. Metal cutting mechanics. *Pergamon Press*, Oxford., 1966. 161

## BIBLIOGRAFÍA

---

## Apéndices A

# Operadores Tensoriales

### A.1. Productos tensoriales

#### Productos diádicos

$$\bar{a} \otimes \bar{b}_{ijkl} = \bar{a}_{ij} \bar{b}_{kl} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{a} \underline{\otimes} \bar{b}_{ijkl} = \bar{a}_{ik} \bar{b}_{lj} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{a} \overline{\otimes} \bar{b}_{ijkl} = \bar{a}_{il} \bar{b}_{jk} \quad (\text{A.3})$$

#### Productos contraídos y matriciales

Entre tensores de segundo orden.

$$\bar{a} : \bar{b} = \bar{a}_{ij} \bar{b}_{ij} \quad (\text{A.4})$$

Entre tensores, un tensor de cuarto orden  $\bar{A}$  y uno de segundo orden  $\bar{b}$ .

$$\bar{A} : \bar{b}_{ij} = \bar{A}_{ijkl} \bar{b}_{kl} \quad (\text{A.5})$$

Producto de dos tensores de segundo orden

$$\bar{a} \bar{b}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{b}_{kj} \quad (\text{A.6})$$

#### Operador Traza

$$\text{traza}(\bar{a}) = \bar{a}_{ii} = \bar{a} : \bar{1} \quad (\text{A.7})$$

## A.2. Definiciones de tensores

Tensor identidad de segundo orden

$$\bar{\mathbf{I}} \quad \bar{\mathbf{I}}_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A.8})$$

Tensor identidad de cuarto orden

$$\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{I}} \quad \bar{\mathbf{I}}_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{lj} \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\mathbf{I}} : \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.10})$$

Tensor identidad desviador de cuarto orden

$$\bar{\mathbf{I}}^D = \bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} \quad (\text{A.11})$$

Tensor desviador de un tensor de segundo orden

$$\bar{\mathbf{a}}^D = \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{I}}) \bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{I}} \quad (\text{A.12})$$

### Cálculo diferencial de tensores

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{I}} \quad (\text{A.13})$$

Siendo  $\bar{\mathbf{I}}$  el tensor identidad de cuarto orden.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^{-1}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = -\bar{\mathbf{a}}^{-1} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}}^{-1} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{I}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{a}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{b}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{I}} \quad (\text{A.16})$$

Siendo  $\bar{\mathbf{I}}$  el tensor identidad de segundo orden.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^2}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{a}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{I}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{b}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{b}} : \bar{\mathbf{a}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{I}} : \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{I}} : \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{I}} = 2\bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{(\partial f(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{a}}))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{a}}) \otimes \frac{\partial f(\bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{\mathbf{a}}} + f(\bar{\mathbf{a}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{\mathbf{a}}} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{1}} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^D}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \frac{\partial (\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}})}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{1}} = \bar{\mathbf{I}}^D \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}{\partial \bar{\mathbf{a}}} &= \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}}) : (\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}}))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{a}} + \frac{1}{9} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{1}}))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 + \frac{1}{9} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 3))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= (2\bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}}) = 2\bar{\mathbf{a}}^D \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}}{\partial \bar{\mathbf{a}}} &= \frac{\partial (\sqrt{(\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}}) : (\bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}})})}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{\partial (\sqrt{(\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{a}} + \frac{1}{9} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{1}})})}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}} \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{a}} + \frac{1}{9} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{1}}))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}} \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 + \frac{1}{9} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2 3))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}} \frac{\partial ((\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}})^2))}{\partial \bar{\mathbf{a}}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}} (2\bar{\mathbf{a}} - \frac{2}{3} \text{traza}(\bar{\mathbf{a}}) \bar{\mathbf{1}}) = \frac{\bar{\mathbf{a}}^D}{\sqrt{\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D}} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$



## A. OPERADORES TENSORIALES

---

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\frac{\bar{a}^D}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}})}{\partial \bar{a}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} \frac{\partial(\bar{a}^D)}{\partial \bar{a}} + \bar{a}^D \frac{\partial(\frac{\bar{1}}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}})}{\partial \bar{a}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} \bar{I}^D - \frac{\bar{a}^D}{2} \left( \frac{\bar{1}}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} \right) \frac{\partial(\bar{a}^D : \bar{a}^D)}{\partial \bar{a}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} \bar{I}^D - \frac{\bar{a}^D}{2} \left( \frac{\bar{1}}{\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} \right) \bar{a}^D 2
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Miscelánea de operaciones de tensores

$$\bar{I}^D : \bar{a} = \bar{I} : \bar{a} - \frac{1}{3}(\bar{1} \otimes \bar{1}) : \bar{a} = \bar{a} - \frac{1}{3}traza(\bar{a})\bar{1} = \bar{a}^D \tag{A.26}$$

$$\bar{I}^D : \bar{1} = \bar{1}^D = \bar{0} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
traza(\bar{a}^D) &= traza(\bar{a} - \frac{1}{3}traza(\bar{a})\bar{1}) = traza(\bar{a}) - \frac{1}{3}traza(\bar{a})traza(\bar{1}) = \\
&= traza(\bar{a}) - \frac{1}{3}traza(\bar{a})3 = 0
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$traza(\bar{1}) = 3 \tag{A.29}$$

$$(\bar{1} \otimes \bar{1}) : \bar{a} = traza(\bar{a})\bar{1} \tag{A.30}$$

$$(\bar{1} \otimes \bar{1}) : \bar{1} = traza(\bar{1})\bar{1} = 3\bar{1} \tag{A.31}$$

$$(\bar{1} \otimes \bar{1}) : \bar{b}^D = traza(\bar{b}^D)\bar{1} = \bar{0} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a} : \bar{b}^D &= (\bar{a}^D + \frac{1}{3}traza(\bar{a})\bar{1}) : \bar{b}^D = (\bar{a}^D : \bar{b}^D) + \frac{1}{3}traza(\bar{a})\bar{1} : \bar{b}^D = \\
&= (\bar{a}^D : \bar{b}^D) + \frac{1}{3}traza(\bar{a})traza(\bar{b}^D) = \bar{a}^D : \bar{b}^D
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$(\bar{1} \otimes \bar{1}) : \bar{b} = \delta_{ij}\delta_{kl}\bar{b}_{kl} = \delta_{ij}traza(\bar{b}) \tag{A.34}$$

### Tensores simétricos

Si el tensor  $\bar{\mathbf{a}}$  es simétrico se tiene:

$$\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{b}} \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.35})$$

Teniendo en cuenta A.18 y A.35 se deduce:

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{\mathbf{b}}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{b}})}{\partial \bar{\mathbf{b}}} = \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.36})$$

$$(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}})^D = \bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{b}} \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{a}}^2 \quad (\text{A.37})$$

Teniendo en cuenta A.18 y A.37 se deduce:

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}})^D}{\partial \bar{\mathbf{b}}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{b}}^D)}{\partial \bar{\mathbf{b}}} = \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{a}}^2 \quad (\text{A.38})$$

Teniendo en cuenta A.18, A.22 y A.37 se deduce:

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}^D\bar{\mathbf{a}})^D}{\partial \bar{\mathbf{b}}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{b}}^D)}{\partial \bar{\mathbf{b}}} = \bar{\mathbf{I}}^D : \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{I}}^D : (\bar{\mathbf{a}} \underline{\otimes} \bar{\mathbf{a}} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{1}} \otimes \bar{\mathbf{a}}^2) \quad (\text{A.39})$$

$$\text{traza}(\bar{\mathbf{a}}^2) = \bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.40})$$

## A. OPERADORES TENSORIALES

---

## Apéndices B

### Variables Intermedias

Para simplificar las expresiones finales y antes de proceder a la deducción de las ecuaciones que permiten un esquema de integración numérica eficiente de las ecuaciones recopiladas en 4.3 Recopilación de Ecuaciones, es conveniente definir algunas variables intermedias y obtener las expresiones de sus derivadas parciales. Mas abajo se pueden encontrar tales definiciones y las expresiones de las derivadas parciales necesarias.

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \bar{\epsilon}_n^e + \Delta\bar{\epsilon}_{n+1} \quad (B.1)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} (; \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}) = C : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \tilde{\sigma}_n + C : \Delta\bar{\epsilon}_{n+1} \quad (B.2)$$

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D} (; \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}) = \tilde{\sigma}_n^D + C : \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^D = \bar{I}^D : C : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} = 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial^D} \quad (B.3)$$

$$C_{a_{n+1}}^{trial} = 2\sigma_{eq_{n+1}}^{trial^2} \quad (B.4)$$

$$C_{b_{n+1}}^{trial} = \frac{3}{2}(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} + 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial}) : \bar{\sigma}_{b_n} = 3\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D} : \bar{\sigma}_{b_n} = 3\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} : \bar{\sigma}_{b_n} \quad (B.5)$$

$$Y_{n+1}^{trial} = \tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e\,trial} \quad (B.6)$$

$$B_{n+1}(\Delta p_{n+1}, D_{n+1}) = (1 + 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}) \quad (B.7)$$

## B. VARIABLES INTERMEDIAS

---

$$\bar{\Sigma}_{n+1}(\Delta p_{n+1}, D_{n+1}; \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}) = \bar{\sigma}_{n+1}^{trial D} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \quad (\text{B.8})$$

De donde se puede calcular  $\Sigma_{eq_{n+1}}$  como:

$$\Sigma_{eq_{n+1}}^2(\Delta p_{n+1}, D_{n+1}; \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}) = \frac{3}{2} \bar{\Sigma}_{n+1} : \bar{\Sigma}_{n+1} = \frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2} \quad (\text{B.9})$$

y definir  $\bar{\Omega}_{n+1}$  y  $\Lambda_{n+1}$  como:

$$\bar{\Omega}_{n+1}(\Delta p_{n+1}, D_{n+1}; \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}) = \frac{\bar{\Sigma}_{n+1}}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \quad (\text{B.10})$$

$$\Lambda_{n+1}(\Delta p_{n+1}, D_{n+1}; \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}) = 3\bar{\sigma}_{n+1}^{trial} : \bar{\Omega}_{n+1} = \frac{C_{a_{n+1}}^{trial} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}}}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \quad (\text{B.11})$$

### B.0.1. Derivadas parciales respecto a $\Delta p$ , $D$ , $\Delta T$ y la variable $B$

En lo que sigue y por simplicidad, las referencias al paso del tiempo (subíndice  $(*)_{n+1}$ ) serán omitidas.

$$\Sigma_{eq,B} = \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial B}(\Delta p, D; \Delta \bar{\epsilon}) = \frac{C_b^{trial} - 2\frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B}}{2B^2\Sigma_{eq}} \quad (\text{B.12})$$

$$\Lambda_{,B} = \frac{(2\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2 C_a^{trial} - C_b^{trial^2})}{2(B\Sigma_{eq})^3} \quad {}^1 \quad (\text{B.13})$$

$$Y_{,\Delta p} = \frac{\partial Y}{\partial \Delta p} = 6G\Delta p - \Lambda - 2\Delta p C_\alpha C_{\sigma_b}(1-D)\Lambda_{,B} \quad (\text{B.14})$$

$$Y_{,D} = \frac{\partial Y}{\partial D} = 2C_\alpha C_{\sigma_b} \Delta p^2 \Lambda_{,B} \quad (\text{B.15})$$

$$Y_{,\Delta T} = \frac{\partial Y}{\partial \Delta T} = -6K\alpha tr(\bar{\epsilon}^{trial}) + 2K\Delta T(3\alpha)^2 \quad (\text{B.16})$$

---

<sup>1</sup>ver D.29 para más detalles

---


$$\bar{\Omega}_{,B} = \frac{\Lambda}{2(B\Sigma_{eq})^2} \bar{\sigma}_{b_n} - \frac{\Sigma_{eq,B}}{\Sigma_{eq}^2} \tilde{\sigma}^{trial^D} \quad 1 \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{\Omega}_{,\Delta p} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \Delta p} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \Delta p} = 2C_\alpha C_{\sigma_b} (1-D) \left( \frac{\Lambda}{2(B\Sigma_{eq})^2} \bar{\sigma}_{b_n} - \frac{\Sigma_{eq,B}}{\Sigma_{eq}^2} \tilde{\sigma}^{trial^D} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\bar{\Omega}_{,D} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial D} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial D} = -2C_\alpha C_{\sigma_b} \Delta p \left( \frac{\Lambda}{2(B\Sigma_{eq})^2} \bar{\sigma}_{b_n} - \frac{\Sigma_{eq,B}}{\Sigma_{eq}^2} \tilde{\sigma}^{trial^D} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{\Omega}_{,\Delta T} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \Delta T} = \bar{0} \quad (\text{B.20})$$

### B.0.2. Derivadas parciales respecto a $\Delta \bar{\epsilon}$

$$\frac{\partial \epsilon^{e\,trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \bar{I} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial tr(\epsilon^{e\,trial})}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial tr(\epsilon^e + \Delta \bar{\epsilon})}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \bar{1} \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial (\tilde{\sigma}_n + C : \Delta \bar{\epsilon})}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = C \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial tr(\tilde{\sigma}^{trial})}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial 3K tr(\epsilon^{e\,trial})}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 3K \bar{1} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^{trial^D}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial 2G \bar{\epsilon}^{e\,trial^D}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 2G \bar{I}^D : \frac{\partial \bar{\epsilon}^{e\,trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 2G \bar{I}^D \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial C_a^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 24G^2 \bar{\epsilon}^{trial^D} = 12G \tilde{\sigma}^{trial^D} \quad 2 \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial C_b^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial 3\tilde{\sigma}^{trial} : \bar{\sigma}_{b_n}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial 3\tilde{\sigma}^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} : \bar{\sigma}_{b_n} = 3C : \bar{\sigma}_{b_n} = 6G \bar{\sigma}_{b_n} \quad (\text{B.27})$$

---

<sup>1</sup>ver D.30 para más detalles

<sup>2</sup>ver D.31 para más detalles

## B. VARIABLES INTERMEDIAS

---

$$\frac{\partial C_c^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 2\tilde{\sigma}^{trial} \quad {}^1 \quad (B.28)$$

$$\bar{\Omega}_{,\Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 2G \frac{\bar{I}^D - \frac{3}{2} \bar{\Omega} \otimes \bar{\Omega}}{\Sigma_{eq}} \quad {}^2 \quad (B.29)$$

$$\Sigma_{eq,\Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 3G \bar{\Omega} \quad {}^3 \quad (B.30)$$

$$\Lambda_{,\Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 3G(\bar{\Omega}(2 - \frac{\Lambda}{\Sigma_{eq}}) + 2\frac{\tilde{\sigma}^{trial^D}}{\Sigma_{eq}}) \quad {}^4 \quad (B.31)$$

$$Y_{,\Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial Y}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 2\tilde{\sigma}^{trial} - 6K\alpha\Delta T\bar{1} - 3G\Delta p(\bar{\Omega}(2 - \frac{\Lambda}{\Sigma_{eq}}) + 2\frac{\tilde{\sigma}^{trial^D}}{\Sigma_{eq}}) \quad {}^5 \quad (B.32)$$

---

<sup>1</sup>ver D.32 para más detalles

<sup>2</sup>ver D.33 para más detalles

<sup>3</sup>ver D.34 para más detalles

<sup>4</sup>ver D.35 para más detalles

<sup>5</sup>ver D.36 para más detalles

## Apéndices C

### Matriz Jacobiana

Los términos de la matriz Jacobiana son:

$$\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta p_{n+1}} = \frac{(1 - D_{n+1})C_\alpha}{B_{n+1}} \left( 2B_{n+1}C_{\sigma_b}\Sigma_{eq, B_{n+1}} - \frac{3}{2B_{n+1}} \right) - 3G - R_{\Delta p_{n+1}} \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial D_{n+1}} = -\frac{\Delta p_{n+1}C_\alpha}{B_{n+1}} \left( 2B_{n+1}C_{\sigma_b}\Sigma_{eq, B_{n+1}} - \frac{3}{2B_{n+1}} \right) \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_f}{\partial \Delta T_{n+1}} = -R_{\Delta T_{n+1}} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Delta p_{n+1}} = & \begin{cases} -\left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D-1} \left[ \left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right) + \frac{\beta_D \Delta p_{n+1}}{S} Y_{\Delta p_{n+1}} \right] & \text{if } p_n \geq p_D \\ -\left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D-1} \left[ \left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right) + \frac{\beta_D \Delta p_{n+1}^*}{S} Y_{\Delta p_{n+1}} \right] & \text{if } p_n < p_D < p_{n+1} \\ 0 & \text{if } p_{n+1} < p_D \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial D_{n+1}} = \begin{cases} 1 - \frac{\Delta p_{n+1} \beta_D}{S} \left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D-1} Y_{D_{n+1}} & \text{if } p_n \geq p_D \\ 1 - \frac{\Delta p_{n+1}^* \beta_D}{S} \left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D-1} Y_{D_{n+1}} & \text{if } p_n < p_D < p_{n+1} \\ 0 & \text{if } p_{n+1} < p_D \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_D}{\partial \Delta T_{n+1}} = \begin{cases} -\frac{\Delta p_{n+1} \beta_D}{S} \left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D-1} Y_{\Delta T_{n+1}} & \text{if } p_n \geq p_D \\ -\frac{\Delta p_{n+1}^* \beta_D}{S} \left(\frac{Y_{n+1}}{S}\right)^{\beta_D-1} Y_{\Delta T_{n+1}} & \text{if } p_n < p_D < p_{n+1} \\ 0 & \text{if } p_{n+1} < p_D \end{cases} \quad (\text{C.6})$$



### C. MATRIZ JACOBIANA

---

$$\frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta p_{n+1}} = -\frac{\eta_{QT}(1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} \left[ (1 - D_{n+1}) \left( \frac{\Lambda_{n+1}}{2} - 6G\Delta p_{n+1} \right) + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} + \right. \\ \left. \Lambda_{,B_{n+1}} C_\alpha C_{\sigma_b} \Delta p_{n+1} (1 - D_{n+1})^2 + \Delta p_{n+1} \frac{(\beta_D + 1) Y_{n+1}^{\beta_D}}{S^{\beta_D}} Y_{,\Delta p_{n+1}} \right] \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial D_{n+1}} = \frac{\eta_{QT} \Delta p_{n+1} (1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} \left[ \left( \frac{\Lambda_{n+1}}{2} - 3G\Delta p_{n+1} \right) + \right. \\ \left. \Lambda_{,B_{n+1}} (1 - D_{n+1}) C_\alpha C_{\sigma_b} \Delta p_{n+1} - \frac{(\beta_D + 1) Y_{n+1}^{\beta_D}}{S^{\beta_D}} Y_{,D_{n+1}} \right] \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_T}{\partial \Delta T_{n+1}} = 1 - \frac{\eta_{QT} \Delta p_{n+1} (1 + tr(\bar{\epsilon}_{n+1}))}{c_v \rho_0} \left[ \frac{(\beta_D + 1) Y_{n+1}^{\beta_D}}{S^{\beta_D}} Y_{,\Delta T_{n+1}} \right] \quad (C.9)$$

## Apéndices D

# Detalle de la deducción de expresiones

$$\mathbf{C} = 2G\bar{\mathbf{I}} + \lambda\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} = 2G\bar{\mathbf{I}}^D + K\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} \quad (\text{D.1})$$

Teniendo en cuenta A.32:

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{a}}^D = 2G\bar{\mathbf{I}}^D : \bar{\mathbf{a}}^D + K(\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) : \bar{\mathbf{a}}^D = 2G\bar{\mathbf{a}}^D \quad (\text{D.2})$$

Teniendo en cuenta A.27 y A.30 tenemos:

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{I}} = 2G\bar{\mathbf{I}}^D : \bar{\mathbf{I}} + K(\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) : \bar{\mathbf{I}} = 3K\bar{\mathbf{I}} \quad (\text{D.3})$$

Por otro lado teniendo en cuenta A.26 y A.33 tenemos:

$$2G\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{b}}^D = 2G\bar{\mathbf{a}}^D : \bar{\mathbf{b}}^D = (2G\bar{\mathbf{I}}^D : \bar{\mathbf{a}}) : \bar{\mathbf{b}}^D = (\mathbf{C} : \bar{\mathbf{a}} - K(\bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}}) : \bar{\mathbf{a}}) : \bar{\mathbf{b}}^D \quad (\text{D.4})$$

Siendo:

$$f_{JC}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b, R, \bar{\mathbf{Y}}; \bar{\mathbf{D}}, T) = \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D + C'_{JC}(T, \bar{\mathbf{D}}, \dot{p})(1 + B'_{JC}p(r)^{n_{JC}})} \quad (\text{D.5})$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{JC}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b, R, \bar{\mathbf{Y}}; \bar{\mathbf{D}}, T)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} &= \frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \\ &= \frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D}}{\partial(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)} : \frac{\partial(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D}{\sqrt{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D}} : \bar{\mathbf{I}}^D = \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_b)^D}} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

## D. DETALLE DE LA DEDUCCIÓN DE EXPRESIONES

---

$$\tilde{\sigma} = (\bar{H}\bar{\sigma}^D\bar{H})^D + \frac{\sigma_H}{1 - \eta D_H} \bar{1} \quad (D.7)$$

Teniendo en cuenta A.20, A.21 y A.38 se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}} &= \frac{\partial((\bar{H}\bar{\sigma}^D\bar{H})^D + \frac{\sigma_H}{1 - \eta D_H} \bar{1})}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial((\bar{H}\bar{\sigma}^D\bar{H})^D)}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{1}{1 - \eta D_H} \bar{1} \otimes \frac{\partial \sigma_H}{\partial \bar{\sigma}} = \\ & \bar{I}^D : (\bar{H} \underline{\otimes} \bar{H} - \frac{1}{3} \bar{1} \otimes \bar{H}^2) + \frac{1}{1 - \eta D_H} \bar{1} \otimes \bar{1} \end{aligned} \quad (D.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{JC}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b, R, \bar{Y}; \bar{D}, T)}{\partial \bar{\sigma}} &= \frac{\partial f_{JC}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b, R, \bar{Y}; \bar{D}, T)}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}} = \\ & (\bar{I}^D : (\bar{H} \underline{\otimes} \bar{H} - \frac{1}{3} \bar{1} \otimes \bar{H}^2) + \frac{1}{1 - \eta D_H} \bar{1} \otimes \bar{1}) : \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} \end{aligned} \quad (D.9)$$

Si además tenemos en cuenta A.32 se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{JC}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b, R, \bar{Y}; \bar{D}, T)}{\partial \bar{\sigma}} = \\ & \bar{I}^D : (\bar{H} \underline{\otimes} \bar{H} - \frac{1}{3} \bar{1} \otimes \bar{H}^2) : \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} = \\ & \frac{3}{2} \frac{\bar{I}^D : (\bar{H}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D \bar{H})}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} = \frac{3}{2} \frac{(\bar{H}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D \bar{H})^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} \end{aligned} \quad (D.10)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la definición de la función de plastificación dada en D.5 y lo establecido en D.6 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{JC}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b, R, \bar{Y}; \bar{D}, T)}{\partial \bar{\sigma}_b} &= - \frac{\partial f_{JC}(\tilde{\sigma}, \bar{\sigma}_b, R, \bar{Y}; \bar{D}, T)}{\partial \tilde{\sigma}} = \\ & - \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{\sqrt{\frac{3}{2}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D : (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}} \end{aligned} \quad (D.11)$$

Las siguientes derivadas parciales son ampliamente usadas en esta Tesis Doctoral.

$$\frac{\partial \bar{a}_{eq}}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial \sqrt{\frac{3}{2} \bar{a}^D : \bar{a}^D}}{\partial \bar{a}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} \frac{\partial \bar{a}^D : \bar{a}^D}{\partial \bar{a}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\bar{a}^D : \bar{a}^D}} 2\bar{a}^D = \frac{3}{2} \frac{\bar{a}^D}{\bar{a}_{eq}} \quad (D.12)$$

La deducción de 3.42 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = \dot{\lambda} \left[ \frac{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}}{\partial \bar{\sigma}} - \frac{\partial R(p, \dot{p}, T, \dots)}{\partial \bar{\sigma}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial(C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b : \bar{\sigma}_b)}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial(\frac{S}{(s+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta_D+1})}{\partial \bar{\sigma}} \right] = \\
&\quad \dot{\lambda} \left[ \frac{\partial((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})}{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)} : \frac{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial(\tilde{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right] = \\
&\quad \dot{\lambda} \left[ \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})} : \bar{I} : \bar{I} \frac{1}{1-D} \right] = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})} \quad (D.13)
\end{aligned}$$

La deducción de 4.30 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_\kappa &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_b} = -\dot{\lambda} \left[ \frac{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}}{\partial \bar{\sigma}_b} - \frac{\partial R(p, \dot{p}, T, \dots)}{\partial \bar{\sigma}_b} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial(C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b : \bar{\sigma}_b)}{\partial \bar{\sigma}_b} + \frac{\partial(\frac{S}{(s+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta_D+1})}{\partial \bar{\sigma}_b} \right] = \\
&\quad -\dot{\lambda} \left[ \frac{\partial((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})}{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)} : \frac{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)}{\partial \bar{\sigma}_b} + (2C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b) \right] = - \\
&\quad \dot{\lambda} \left[ -\frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})} : \bar{I} + (2C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b) \right] = \dot{\lambda} \left[ \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)^D}{((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})} - (2C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b) \right] \quad (D.14)
\end{aligned}$$

La deducción de 3.40 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_\iota &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = -\dot{\lambda} \left[ \frac{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}}{\partial R} - \frac{\partial R(p, \dot{p}, T, \dots)}{\partial R} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial(C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b : \bar{\sigma}_b)}{\partial R} + \frac{\partial(\frac{S}{(s+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta_D+1})}{\partial R} \right] = \dot{\lambda} \quad (D.15)
\end{aligned}$$

La deducción de 4.31 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{D} &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} = \dot{\lambda} \left[ \frac{\partial(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq}}{\partial \bar{Y}} - \frac{\partial R(p, \dot{p}, T, \dots)}{\partial \bar{Y}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial(C_{\sigma_b} \bar{\sigma}_b : \bar{\sigma}_b)}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial(\frac{S}{(s+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta_D+1})}{\partial \bar{Y}} \right] = \dot{\lambda} \frac{1}{1-D} \left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta_D} \quad (D.16)
\end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta en D.13 la expresión 4.27 y por tanto:

$$\frac{\partial(\tilde{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} = \bar{I} \frac{1}{1-D} \quad (D.17)$$

## D. DETALLE DE LA DEDUCCIÓN DE EXPRESIONES

---

y en D.14 que:

$$\frac{\partial((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})}{\partial \bar{\sigma}_b} = - \frac{\partial((\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq})}{\partial \tilde{\sigma}} \quad (D.18)$$

Para llegar a la expresión 4.42 se han agrupado los términos que contienen  $(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D$  en 4.41 y se ha tenido en cuenta que  $\bar{\sigma}_{b_n}$  es un tensor desviador y por lo tanto  $\bar{\sigma}_{b_n}^D = \bar{\sigma}_{b_n}$  con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{(2G + C_\alpha(1 - D_{n+1}))\Delta p_{n+1}}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} - \right. \\ & \left. 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \right) = \\ & (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_n^D + C : \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^D + 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \quad (D.19) \end{aligned}$$

Reorganizando los términos del lado izquierdo de D.19 se llega a:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{(2G + C_\alpha(1 - D_{n+1}))\Delta p_{n+1}}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} - \right. \\ & \left. 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \right) = \\ & \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \left[ (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} + 3G\Delta p_{n+1} + \frac{3}{2}C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} - \right. \\ & \left. 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}} \right] = \\ & \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \left[ (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} + 3G\Delta p_{n+1} + \right. \\ & \left. \frac{3}{2}C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \left( 1 - \frac{2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{B_{n+1}} \right) \right] = \\ & \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \left[ (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} + 3G\Delta p_{n+1} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}} \right] \quad (D.20) \end{aligned}$$

Reorganizando los términos del lado derecho de D.19 se llega a:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_n^D + C : \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^D + 2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1} \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} = \\ & \tilde{\sigma}_n^D + C : \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^D + \bar{\sigma}_{b_n}^D \left( \frac{2C_\alpha C_{\sigma_b}(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{B_{n+1}} - 1 \right) = \\ & \tilde{\sigma}_{n+1}^{Dtrial} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}^D}{B_{n+1}} = \bar{\Sigma}_{n+1} \quad (D.21) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente expresión que fácilmente nos permite deducir 4.42:

$$\frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} \left[ (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}} + 3G\Delta p_{n+1} + \frac{3C_\alpha(1 - D_{n+1})\Delta p_{n+1}}{2B_{n+1}} \right] = \bar{\Sigma}_{n+1} \quad (D.22)$$

Antes de determinar una expresión simplificada para  $Y_{n+1}$  es conveniente deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D}(\cdot; \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}) &= \bar{I}^D : (C : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) = \bar{I}^D : ((2G\bar{I} + \lambda \bar{1} \otimes \bar{1}) : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) = \\ \bar{I}^D : (2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial} + \lambda \bar{1} \otimes \bar{1} : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) &= \\ 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial^D} + \lambda tr(\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial})\bar{I}^D : \bar{1} &\stackrel{=0}{=} 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial^D} \quad (D.23)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}tr(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial}) &= tr(C : \epsilon_{n+1}^{e trial}) = tr((2G\bar{I}^D + K\bar{1} \otimes \bar{1}) : \epsilon_{n+1}^{e trial}) = \\ tr(2G\bar{I}^D : \epsilon_{n+1}^{e trial}) + tr(K(\bar{1} \otimes \bar{1}) : \epsilon_{n+1}^{e trial}) &= \\ Ktr(tr(\epsilon_{n+1}^{e trial})\bar{1}) &= 3Ktr(\epsilon_{n+1}^{e trial}) \quad (D.24)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\bar{\Omega}_{n+1}$  es un tensor desviador y las expresiones B.3, B.10, B.11 y D.23 se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\Delta p_{n+1}(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} + 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) : \bar{\Omega}_{n+1} &= \\ \frac{3}{2}\Delta p_{n+1}(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D} + 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial^D}) : \bar{\Omega}_{n+1} &= \Delta p_{n+1}\Lambda_{n+1} \quad (D.25)\end{aligned}$$

A partir de 4.51, 4.52, D.24 y D.25 llegamos a:

$$\begin{aligned}Y_{n+1} &= \tilde{\sigma}_{n+1} : \bar{\epsilon}_{n+1}^e = \\ (\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} - 3K\alpha\Delta T_{n+1}\bar{1} - 3G\Delta p_{n+1}\bar{\Omega}_{n+1}) : \\ (\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial} - \alpha\Delta T_{n+1}\bar{1} - \Delta p_{n+1}\frac{3}{2}\bar{\Omega}_{n+1}) &= \\ \tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} : (\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial} - \Delta p_{n+1}\frac{3}{2}\bar{\Omega}_{n+1}) - tr(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial})\alpha\Delta T_{n+1} - \\ 3K\alpha\Delta T_{n+1}tr(\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) + 9K(\alpha\Delta T_{n+1})^2 + 3G\Delta p_{n+1}^2 - \\ 3G\Delta p_{n+1}\bar{\Omega}_{n+1} : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial} &= \tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} : \bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial} - \alpha\Delta T_{n+1}tr(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} + 3K\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) + \\ K(3\alpha\Delta T_{n+1})^2 + 3G\Delta p_{n+1}^2 - \frac{3}{2}\Delta p_{n+1}(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} + 2G\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) : \bar{\Omega}_{n+1} &= \\ Y_{n+1}^{trial} - \alpha\Delta T_{n+1}tr(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} + 3K\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) + \\ K(3\alpha\Delta T_{n+1})^2 + 3G\Delta p_{n+1}^2 - \Delta p_{n+1}\Lambda_{n+1} &= \\ Y_{n+1}^{trial} - \alpha\Delta T_{n+1}tr(6K\bar{\epsilon}_{n+1}^{e trial}) + \\ K(3\alpha\Delta T_{n+1})^2 + 3G\Delta p_{n+1}^2 - \Delta p_{n+1}\Lambda_{n+1} &\quad (D.26)\end{aligned}$$

## D. DETALLE DE LA DEDUCCIÓN DE EXPRESIONES

---

A continuación se muestra como deducir la expresión 4.56:

$$\begin{aligned}
c_v \Delta T_{n+1} \rho_{n+1} &= \eta_{QT} \Delta p_{n+1} (\bar{\sigma}_{n+1} : \frac{3}{2} \frac{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{n+1}^D}{(\tilde{\sigma} - \bar{\sigma}_b)_{eq_{n+1}}} + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}}) = \\
\eta_{QT} \Delta p_{n+1} ((1 - D_{n+1}) \tilde{\sigma}_{n+1} : \frac{3}{2} \frac{\bar{\Sigma}_{n+1}}{\Sigma_{eq_{n+1}}} + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}}) &= \\
\eta_{QT} \Delta p_{n+1} ((1 - D_{n+1}) \frac{3}{2} (\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} - 3K\alpha \Delta T_{n+1} \bar{1} - & \\
2G \Delta p_{n+1} \frac{3}{2} \frac{\bar{\Sigma}_{n+1}}{\Sigma_{eq_{n+1}}}) : \frac{\bar{\Sigma}_{n+1}}{\Sigma_{eq_{n+1}}} + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}}) & \quad (D.27)
\end{aligned}$$

que, teniendo en cuenta que  $\bar{\Sigma}_{n+1}$  es un tensor desviador ( $\bar{1} : \bar{\Sigma}_{n+1} = \bar{0}$ ) llegamos a:

$$\begin{aligned}
c_v \Delta T_{n+1} \rho_{n+1} &= \\
\eta_{QT} \Delta p_{n+1} \left[ (1 - D_{n+1}) \frac{3}{2} (\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} : \frac{\bar{\Sigma}_{n+1}}{\Sigma_{eq_{n+1}}} - 2G \Delta p_{n+1}) + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right] &= \\
\eta_{QT} \Delta p_{n+1} \left[ (1 - D_{n+1}) \left( \frac{\Lambda_{n+1}}{2} - 3G \Delta p_{n+1} \right) + \frac{Y_{n+1}^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right] & \quad (D.28)
\end{aligned}$$

La deducción de B.13 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{B_{n+1}} &= \\
\frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1} \Sigma_{eq_{n+1}}} - \frac{1}{2} \frac{(B_{n+1} C_{a_{n+1}}^{trial} - C_{b_{n+1}}^{trial})(B_{n+1} C_{a_{n+1}}^{trial} - C_{b_{n+1}}^{trial})}{(B_{n+1} \Sigma_{eq_{n+1}})^3} &= \\
\frac{1}{2(B_{n+1} \Sigma_{eq_{n+1}})^3} (2(C_{a_{n+1}}^{trial})(B_{n+1} \Sigma_{eq_{n+1}})^2 - (B_{n+1} C_{a_{n+1}}^{trial} - C_{b_{n+1}}^{trial})^2) &= \\
\frac{1}{2(B_{n+1} \Sigma_{eq_{n+1}})^3} \left[ (B_{n+1}^2 C_{a_{n+1}}^{trial^2} - 2B_{n+1} C_{a_{n+1}}^{trial} C_{b_{n+1}}^{trial} + 2\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2 C_{a_{n+1}}^{trial}) - \right. & \\
(B_{n+1}^2 C_{a_{n+1}}^{trial^2} + C_{b_{n+1}}^{trial^2} - 2B_{n+1} C_{a_{n+1}}^{trial} C_{b_{n+1}}^{trial}) \left. \right] &= \\
\frac{(2\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2 C_{a_{n+1}}^{trial} - C_{b_{n+1}}^{trial^2})}{2(B_{n+1} \Sigma_{eq_{n+1}})^3} & \quad (D.29)
\end{aligned}$$

La deducción de B.17 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\Omega}_{n+1}}{\partial B_{n+1}} = & \frac{\frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}^2}}{\sqrt{\frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2}}} - \frac{(\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}})(\frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}^2} - 2\frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^3})}{2\left(\sqrt{\frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2}}\right)^3} = \\
& \frac{(C_{a_{n+1}}^{trial} - \frac{2C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{2\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2})\frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}^2} - (\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}})(\frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}^2} - 2\frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^3})}{2\left(\sqrt{\frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2}}\right)^3} = \\
& \frac{(C_{a_{n+1}}^{trial} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}})\bar{\sigma}_{b_n} - \tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D}(C_{b_{n+1}}^{trial} - 2\frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}})}{2B_{n+1}^2\left(\sqrt{\frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2}}\right)^3} = \\
& \frac{\Lambda_{n+1}}{2(B_{n+1}\Sigma_{eq_{n+1}})^2}\bar{\sigma}_{b_n} - \frac{\Sigma_{eq, B_{n+1}}}{\Sigma_{eq_{n+1}}^2}\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial^D} \quad (D.30)
\end{aligned}$$

La deducción de B.26 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_a^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial 3\tilde{\sigma}^{trial^D} : \tilde{\sigma}^{trial^D}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = 12G^2 \frac{\partial \bar{\epsilon}^{trial^D} : \bar{\epsilon}^{trial^D}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
24G^2 \bar{\epsilon}^{trial^D} = 12G\tilde{\sigma}^{trial^D} \quad (D.31)
\end{aligned}$$

La deducción de B.28 es como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_c^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}^{trial} : \bar{\epsilon}^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} : \bar{\epsilon}^{trial} + \tilde{\sigma}^{trial} : \frac{\partial \bar{\epsilon}^{trial}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
C : \bar{\epsilon}^{trial} + \tilde{\sigma}^{trial} : \bar{I} = 2\tilde{\sigma}^{trial} \quad (D.32)
\end{aligned}$$



## D. DETALLE DE LA DEDUCCIÓN DE EXPRESIONES

La deducción de B.29 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\Omega}_{n+1}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} &= \frac{\partial \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}}}{\Sigma_{eq_{n+1}}}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}}}{\sqrt{\frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B_{n+1}^2}}}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
&= \left( \tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \right) \otimes \frac{\partial \frac{1}{\Sigma_{eq_{n+1}}}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \frac{\partial \left( \tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \right)}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
&= - \frac{\left( \tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \right)}{2 \left( \Sigma_{eq_{n+1}} \right)^3} \otimes \frac{\partial \left( \frac{C_{a_{n+1}}^{trial}}{2} - \frac{C_{b_{n+1}}^{trial}}{B_{n+1}} \right)}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
&= - 3G \frac{\left( \tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \right) \otimes \left( \tilde{\sigma}_{n+1}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B_{n+1}} \right)}{\left( \Sigma_{eq_{n+1}} \right)^3} + \frac{2G}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \bar{I}^D = \\
&= - 3G \frac{\bar{\Sigma}_{n+1} \otimes \bar{\Sigma}_{n+1}}{\left( \Sigma_{eq_{n+1}} \right)^3} + \frac{2G}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \bar{I}^D = G \frac{2\bar{I}^D - 3\bar{\Omega}_{n+1} \otimes \bar{\Omega}_{n+1}}{\Sigma_{eq_{n+1}}} \quad (D.33)
\end{aligned}$$

La deducción de B.30 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{eq, \Delta \bar{\epsilon}} &= \frac{1}{2\Sigma_{eq}} \frac{\partial \left( \frac{C_a^{trial}}{2} - \frac{C_b^{trial}}{B} + \frac{\bar{\sigma}_{b_{eqn}}^2}{B^2} \right)}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
&= \frac{1}{2\Sigma_{eq}} \left( \frac{\partial \frac{C_a^{trial}}{2}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} - \frac{\partial C_b^{trial}}{B} \right) = \\
&= \frac{3G}{\Sigma_{eq}} (2G\tilde{\epsilon}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B}) = \frac{3G}{\Sigma_{eq}} (\tilde{\sigma}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B}) = 3G\bar{\Omega} \quad (D.34)
\end{aligned}$$

La deducción de B.31 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\Delta \bar{\epsilon}} &= \frac{\partial \frac{C_a^{trial} - \frac{C_b^{trial}}{B}}{\Sigma_{eq}}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
&= \left( C_a^{trial} - \frac{C_b^{trial}}{B} \right) \frac{\partial \frac{1}{\Sigma_{eq}}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Sigma_{eq}} \frac{\partial \left( C_a^{trial} - \frac{C_b^{trial}}{B} \right)}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} = \\
&= - \left( C_a^{trial} - \frac{C_b^{trial}}{B} \right) \frac{1}{\Sigma_{eq}^2} \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}} + \frac{6G}{\Sigma_{eq}} \left( (2\tilde{\sigma}^{trialD} - \frac{\bar{\sigma}_{b_n}}{B}) \right) = \\
&= - \frac{\Lambda}{\Sigma_{eq}} 3G\bar{\Omega} + 6G \left( \bar{\Omega} + \frac{\tilde{\sigma}^{trialD}}{\Sigma_{eq}} \right) = 3G \left( \bar{\Omega} \left( 2 - \frac{\Lambda}{\Sigma_{eq}} \right) + 2 \frac{\tilde{\sigma}^{trialD}}{\Sigma_{eq}} \right) \quad (D.35)
\end{aligned}$$

La deducción de B.32 es como sigue:

$$\begin{aligned}
Y_{,\Delta\bar{\epsilon}} &= \frac{\partial(C_c^{trial} - 6K\alpha\Delta T tr(\bar{\epsilon}^{e trial}) + K(3\alpha\Delta T)^2 + 3G\Delta p^2 - \Delta p\Lambda)}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} = \\
&= \frac{\partial(C_c^{trial} - 6K\alpha\Delta T tr(\bar{\epsilon}^{e trial}) - \Delta p\Lambda)}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} = \\
&= 2\tilde{\sigma}_{n+1}^{trial} - 6K\alpha\Delta T\bar{1} - 3G\Delta p(\bar{\Omega}(2 - \frac{\Lambda}{\Sigma_{eq}}) + 2\frac{\tilde{\sigma}^{trial D}}{\Sigma_{eq}}) \quad (D.36)
\end{aligned}$$

La deducción de 4.79 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma}_0 + \frac{\partial C : (\epsilon^{e trial} - \alpha\Delta T\bar{1} - \Delta p\frac{3}{2}\bar{\Omega})}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} : \delta\Delta\bar{\epsilon} + \\
&= \frac{\partial C : (\epsilon^{e trial} - \alpha\Delta T\bar{1} - \Delta p\frac{3}{2}\bar{\Omega})}{\partial\bar{v}} \delta\bar{v} = \\
&= \tilde{\sigma}_0 + C : (\bar{I} - \Delta p\frac{3}{2}\frac{\partial(\bar{\Omega})}{\partial\Delta\bar{\epsilon}}) : \delta\Delta\bar{\epsilon} - \\
&= C : \left(\frac{3}{2}(\bar{\Omega} + \Delta p\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\Delta p}), \Delta p\frac{3}{2}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial D}, \alpha\bar{1}\right) \delta\bar{v} \quad (D.37)
\end{aligned}$$

La deducción de 4.89 es como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{R}_T}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} &= \frac{\partial(\Delta T - \frac{\eta_{QT}\Delta p(1 + tr(\bar{\epsilon}))}{c_v\rho_0} \left[ (1-D)\left(\frac{\Lambda}{2} - 3G\Delta p\right) + \frac{Y^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right])}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} = \\
&= -\frac{\eta_{QT}\Delta p}{c_v\rho_0} \left( \left[ (1-D)\left(\frac{\Lambda}{2} - 3G\Delta p\right) + \frac{Y^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right] \frac{\partial(1 + tr(\bar{\epsilon}))}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} + \right. \\
&= (1 + tr(\bar{\epsilon})) \frac{\partial \left( \left[ (1-D)\left(\frac{\Lambda}{2} - 3G\Delta p\right) + \frac{Y^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right] \right)}{\partial\Delta\bar{\epsilon}} \Bigg) = \\
&= -\frac{\eta_{QT}\Delta p}{c_v\rho_0} \left( \left[ (1-D)\left(\frac{\Lambda}{2} - 3G\Delta p\right) + \frac{Y^{\beta_D+1}}{S^{\beta_D}} \right] \bar{1} + \right. \\
&= (1 + tr(\bar{\epsilon})) \left[ (1-D)\left(\frac{\Lambda_{,\Delta\bar{\epsilon}}}{2}\right) + (\beta_D + 1)\left(\frac{Y}{S}\right)^{\beta_D} Y_{,\Delta\bar{\epsilon}} \right] \Bigg) \quad (D.38)
\end{aligned}$$

#### **D. DETALLE DE LA DEDUCCIÓN DE EXPRESIONES**

---

## Apéndices E

### Superficie de Plastificación tipo $J_2$

El tensor de tensiones puede descomponerse en su parte desviadora y en su parte esférica como se indica en E.1.

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^D + \bar{\sigma}^{esf} \quad (\text{E.1})$$

donde  $\bar{\sigma}^{esf}$  se define como:

$$\bar{\sigma}^{esf} = \bar{1} \frac{\sigma_{ii}}{3} = \bar{1} \sigma_H \quad (\text{E.2})$$

Conforme a la descomposición expresada en E.1, la representación en el espacio de las tensiones principales de un estado de carga  $\bar{\sigma}$  puede representarse como la suma de un vector  $\bar{\sigma}^D$  situado en el plano  $\pi$  o *plano desviador* mas el vector  $\bar{\sigma}^{esf}$  perpendicular a dicho plano y de longitud igual a un tercio de la traza de  $\bar{\sigma}$  ( $\frac{\sigma_{ii}}{3} = \sigma_H$ ) como se muestra en la figura E.1. Por otro lado, en el caso de no considerar el endurecimiento cinemático, la superficie de plastificación que establece la plasticidad de tipo  $J_2$  se puede expresar como:

$$\sigma_Y(p, \dot{p}, T, \dots) = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}^D : \bar{\sigma}^D} \quad (\text{E.3})$$

que expresada según las componentes principales del tensor de tensiones queda:

$$\sigma_Y(p, \dot{p}, T, \dots) = \sqrt{\frac{3}{2} ((\sigma_1 - \sigma_H)^2 + (\sigma_2 - \sigma_H)^2 + (\sigma_3 - \sigma_H)^2)} \quad (\text{E.4})$$

Para un valor dado de  $\sigma_Y$ , el corte de la superficies definida por la relación E.4 con el plano  $\pi$ , donde  $\sigma_H = 0$ , corresponde a un círculo con centro en el origen del espacio de tensiones. Teniendo en cuenta la descomposición expresada en E.1 y la expresión de la superficie de plastificación E.3 o E.4 en la que la componente esférica no tiene ninguna contribución, se puede comprobar que la superficie de plastificación corresponde a un cilindro circular cuyo eje pasa por el origen y tiene su eje perpendicular al plano  $\pi$  o *plano desviador* como se muestra en la

## E. SUPERFICIE DE PLASTIFICACIÓN TIPO $J_2$

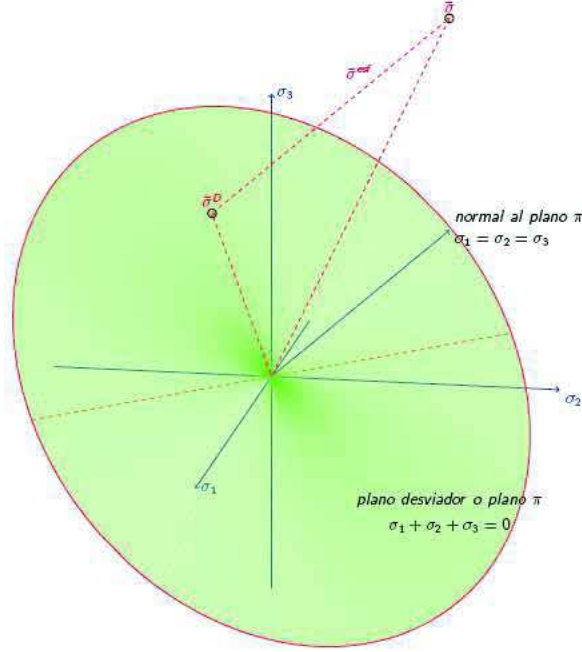


Figura E.1: Descomposición de la tensión en sus partes desviadora  $\sigma^D$  y esférica  $\sigma^{esf}$

figura E.2. Los estados tensionales situados en el interior del cilindro corresponde a estados de carga elásticos.

Cuando se incorpora el endurecimiento cinemático en el modelo constitutivo, el criterio de plastificación  $J_2$  varía su expresión tomando la forma siguiente:

$$\sigma_Y(p, \dot{p}, T, \dots) = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma}^D - \bar{\sigma}_b) : (\bar{\sigma}^D - \bar{\sigma}_b)} \quad (\text{E.5})$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $\bar{\sigma}_b$  es un tensor desviador según se indica en 3.4.3.2 Ecuaciones del Endurecimiento Cinemático.

Sea  $\mathbf{R}$  la matriz de cambio de ejes ortogonal que permite expresar el tensor  $\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b$  en sus ejes principales. De esta manera se tiene:

$$\sigma_{\bar{\sigma}_b}^R = \mathbf{R}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_b)\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{\sigma}_b1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\bar{\sigma}_b2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\bar{\sigma}_b3} \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Donde el superíndice  $*^R$  hace referencia a su representación en los ejes asociados a la transformación  $\mathbf{R}$ . Aplicando este cambio de ejes de forma independiente a  $\bar{\sigma}$  y a  $\bar{\sigma}_b$  y descomponiendo

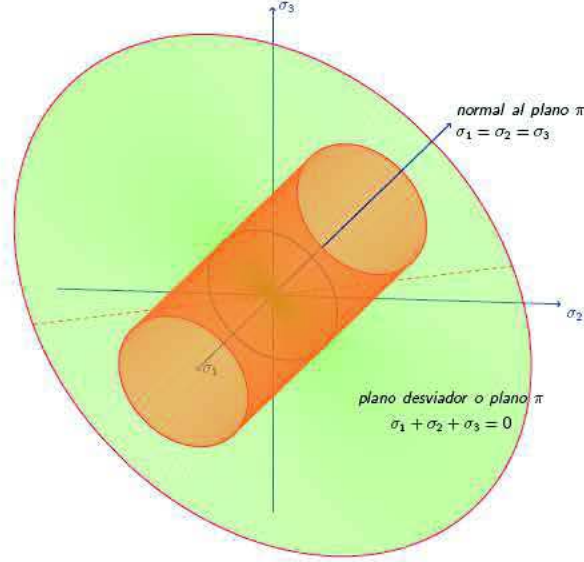


Figura E.2: Superficie de plastificación según el criterio de plastificación de tipo  $J_2$  representado en el espacio de las tensiones principales

el resultado en su parte diagonal  $\bar{\sigma}_D^R$  y su parte con diagonal nula  $\bar{\sigma}_{b_{DN}}^R$  se tiene:

$$\mathbf{R}\bar{\sigma}\mathbf{R}^T = \bar{\sigma}_D^R + \bar{\sigma}_{b_{DN}}^R \quad (\text{E.7})$$

$$\mathbf{R}\bar{\sigma}_b\mathbf{R}^T = \bar{\sigma}_{b_D}^R + \bar{\sigma}_{b_{DN}}^R \quad (\text{E.8})$$

Teniendo en cuenta que E.6 es una matriz diagonal y la descomposición hecha en E.7 y E.8 se llega a  $\bar{\sigma}_{b_{DN}}^R = -\bar{\sigma}_D^R$  y por tanto se puede decir que  $\bar{\sigma}_b^R = \bar{\sigma}_D^R - \bar{\sigma}_{b_D}^R$ . Por otro lado, dado que  $\bar{\sigma}_b$  es un tensor desviador, también lo es  $\bar{\sigma}_{b_D}^R + \bar{\sigma}_{b_{DN}}^R$  y como  $\bar{\sigma}_{b_{DN}}^R$  tiene por definición su traza nula, entonces  $\bar{\sigma}_{b_D}^R$  también es un tensor desviador situado en el plano  $\pi$ . De manera similar la traza de  $\bar{\sigma}$  es igual que la traza de  $\bar{\sigma}_D^R + \bar{\sigma}_{DN}^R$  y como por definición la traza de  $\bar{\sigma}_{DN}^R$  es nula, entonces la traza de  $\bar{\sigma}_D^R$  es igual a la traza de  $\bar{\sigma}$ . El tensor  $\bar{\sigma}_D^R$  puede descomponerse en

## E. SUPERFICIE DE PLASTIFICACIÓN TIPO $J_2$

su parte esférica y su parte desviadora, como se muestra en la figura E.3, de manera que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{\sigma}_b}^R &= \bar{\sigma}_D^R - \bar{\sigma}_{b_D}^R = \bar{\sigma}_D^R + \bar{\sigma}_D^{esfR} - \bar{\sigma}_{b_D}^R = \\ &\begin{pmatrix} \sigma_{D_1}^R - \sigma_{b_{D_1}}^R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{D_2}^R - \sigma_{b_{D_2}}^R & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{D_3}^R - \sigma_{b_{D_3}}^R \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \sigma_{D_1}^R + \sigma_{D_1}^{esfR} - \sigma_{b_{D_1}}^R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{D_2}^R + \sigma_{D_2}^{esfR} - \sigma_{b_{D_2}}^R & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{D_3}^R + \sigma_{D_3}^{esfR} - \sigma_{b_{D_3}}^R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (E.9)$$

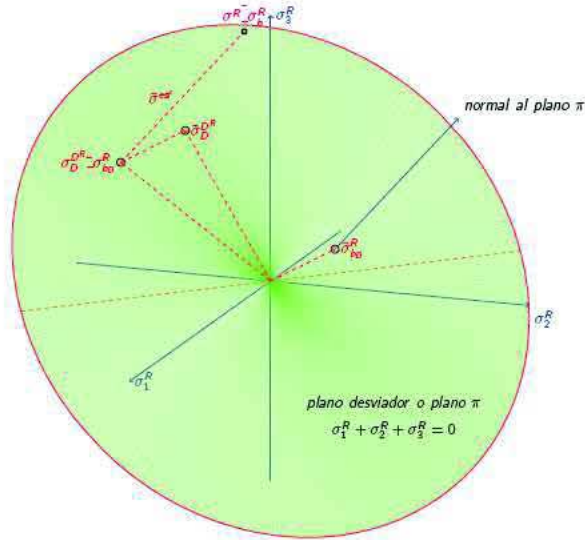


Figura E.3: Descomposición del tensor  $\sigma_{\bar{\sigma}_b}^R$  en sus partes desviadora  $\bar{\sigma}_D^R - \bar{\sigma}_{b_D}^R$  y esférica  $\bar{\sigma}_D^{esfR}$

Con  $\sigma_{D_1}^{esfR} = \sigma_{D_2}^{esfR} = \sigma_{D_3}^{esfR} = \sigma_H$ . Conforme a la descomposición expresada en E.9, la representación en el espacio de las tensiones principales de un estado de carga  $\sigma_{\bar{\sigma}_b}^R$  puede representarse como la resta de dos vectores  $\bar{\sigma}_D^R - \bar{\sigma}_{b_D}^R$  situados en el plano  $\pi$  o *plano desviador* mas un vector  $\bar{\sigma}_D^{esfR}$  perpendicular a dicho plano y de longitud igual a un tercio de la traza de  $\bar{\sigma}$  como se muestra en E.3.



En los ejes principales de  $\sigma \text{--} \sigma_b^R$  la superficie de plastificación dada por E.5 queda:

$$\begin{aligned} \sigma_Y(p, \dot{p}, T, \dots) = \\ \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_{D_1}^R - \sigma_{D_1}^{esfR} - \sigma_{b_{D_1}}^R)^2 + (\sigma_{D_2}^R - \sigma_{D_2}^{esfR} - \sigma_{b_{D_2}}^R)^2 + (\sigma_{D_3}^R - \sigma_{D_3}^{esfR} - \sigma_{b_{D_3}}^R)^2)} = \\ \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_{D_1}^{DR} - \sigma_{b_{D_1}}^R)^2 + (\sigma_{D_2}^{DR} - \sigma_{b_{D_2}}^R)^2 + (\sigma_{D_3}^{DR} - \sigma_{b_{D_3}}^R)^2)} \quad (E.10) \end{aligned}$$

Para un valor dado de  $\sigma_Y$ , el corte de la superficies definida por la relación E.10 con el plano  $\pi$ , donde  $\sigma_H = 0$ , corresponde a un círculo con centro en el punto  $(\sigma_{b_{D_1}}^R, \sigma_{b_{D_2}}^R, \sigma_{b_{D_3}}^R)$  del espacio de tensiones. De manera similar a lo explicado anteriormente, se puede comprobar que la superficie de plastificación cuando se considera el endurecimiento cinemático corresponde a un cilindro circular cuyo eje pasa por el punto  $(\sigma_{b_{D_1}}^R, \sigma_{b_{D_2}}^R, \sigma_{b_{D_3}}^R)$  del plano  $\pi$  y tiene su eje perpendicular a dicho plano como se muestra en la figura E.4.

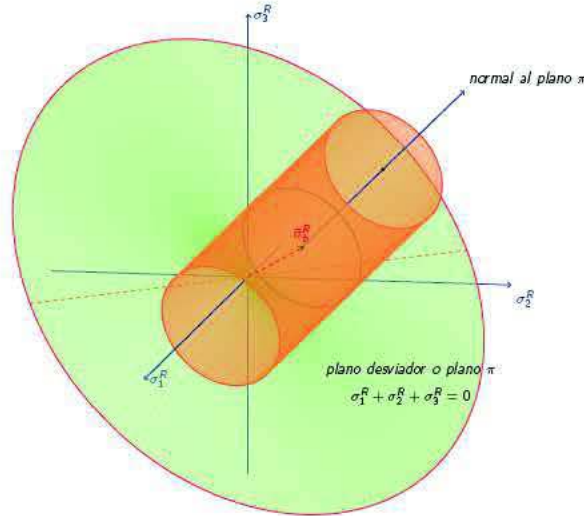


Figura E.4: Superficie de plastificación según el criterio de plastificación de tipo  $J_2$  representado en el espacio de las tensiones principales de  $\sigma \text{--} \sigma_b$ .